Министерство образования Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

Кафедра «Теоретическая механика»

Одобрено
методической комиссией по
общенаучным дисциплинам

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО СТАТИКЕ

Методические указания по курсу «Теоретическая механика»
для студентов всех специальностей

Под редакцией
д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С.

МОСКВА - 2004

Авторский коллектив: Л.В.Божкова, В.Г.Рябов, Г.И.Норицына, В.К.Петров, Э.А.Томило, А.И.Зубков.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С..

Расчетно-графические работы по статике. Методические указания по курсу "Теоретическая механика" для студентов всех специальностей.

В настоящий сборник включены пять заданий по разделу "статика". Каждое задание содержит 30 схем конструкций, часть схем заимствована из "Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике" под общей редакцией проф. А.А.Яблонского. Приведены примеры выполнения всех заданий с пояснениями.

ЗАДАНИЕ С-1

Определить реакции опор конструкции. Схемы конструкций представлены на рис. 1-5 (размеры - в м), нагрузка приведена в таблице 1. При этом величины сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_1'$, а также $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_2'$ равны соответственно между собой $(P_1 = P_1'; P_2 = P_2')$.

Таблица 1.

№№ варианта	P_1, *кН*	P_2, *кН*	M, *кН·м*	q, *кН / м*
1	6	-	25	0,8
2	5	8	26	-
3	8	10	33	1,1
4	10	-	25	1,3
5	12	-	27	1,3
6	14	12	-	0,9
7	16	8	18	1,4
8	12	6	20	1,0
9	14	-	28	1,4
10	8	-	26	0,9
11	15	10	29	1,0
12	15	8	28	1,5
13	7	6	15	1,1
14	5	-	30	0,9
15	6	10	24	1,5
16	8	11	31	0,8
17	9	15	26	1,1
18	7	16	27	0,8
19	6	18	35	1,4
20	7	16	32	0,8
21	8	17	30	1,2
22	5	6	34	2,5
23	14	7	10	2
24	10	6	7	1,5
25	11	14	20	0,5
26	15	16	14	1
27	14	4	8	2,5
28	10	-	7	3
29	18	6	8	1
30	16	10	14	2

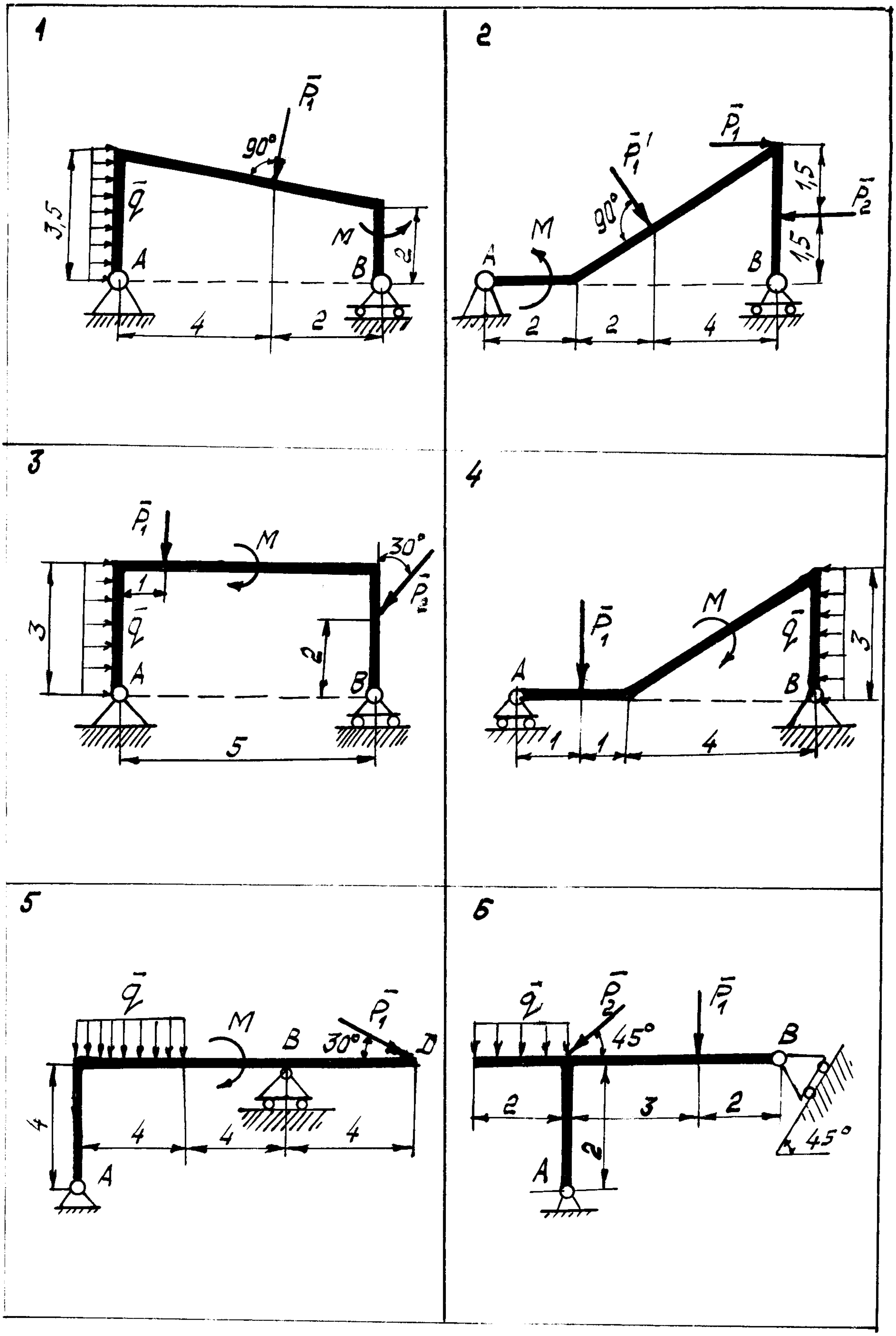

1
$\bar{P}_1$
90°
$\bar{q}$
3,5
M
A
B
2
4
2
2
$\bar{P}_1$
$\bar{P}_1'$
90°
M
A
B
1,5
1,5
$\bar{P}_2$
2
2
4
3
$\bar{P}_1$
M
30°
$\bar{P}_2$
1
$\bar{q}$
3
2
A
B
5
4
$\bar{P}_1$
M
$\bar{q}$
3
A
B
1
1
4
5
$\bar{q}$
M
B
30°
$\bar{P}_1$
D
4
4
4
4
A
6
$\bar{q}$
$\bar{P}_2$
45°
$\bar{P}_1$
B
2
3
2
2
A
45°

Рис. 1

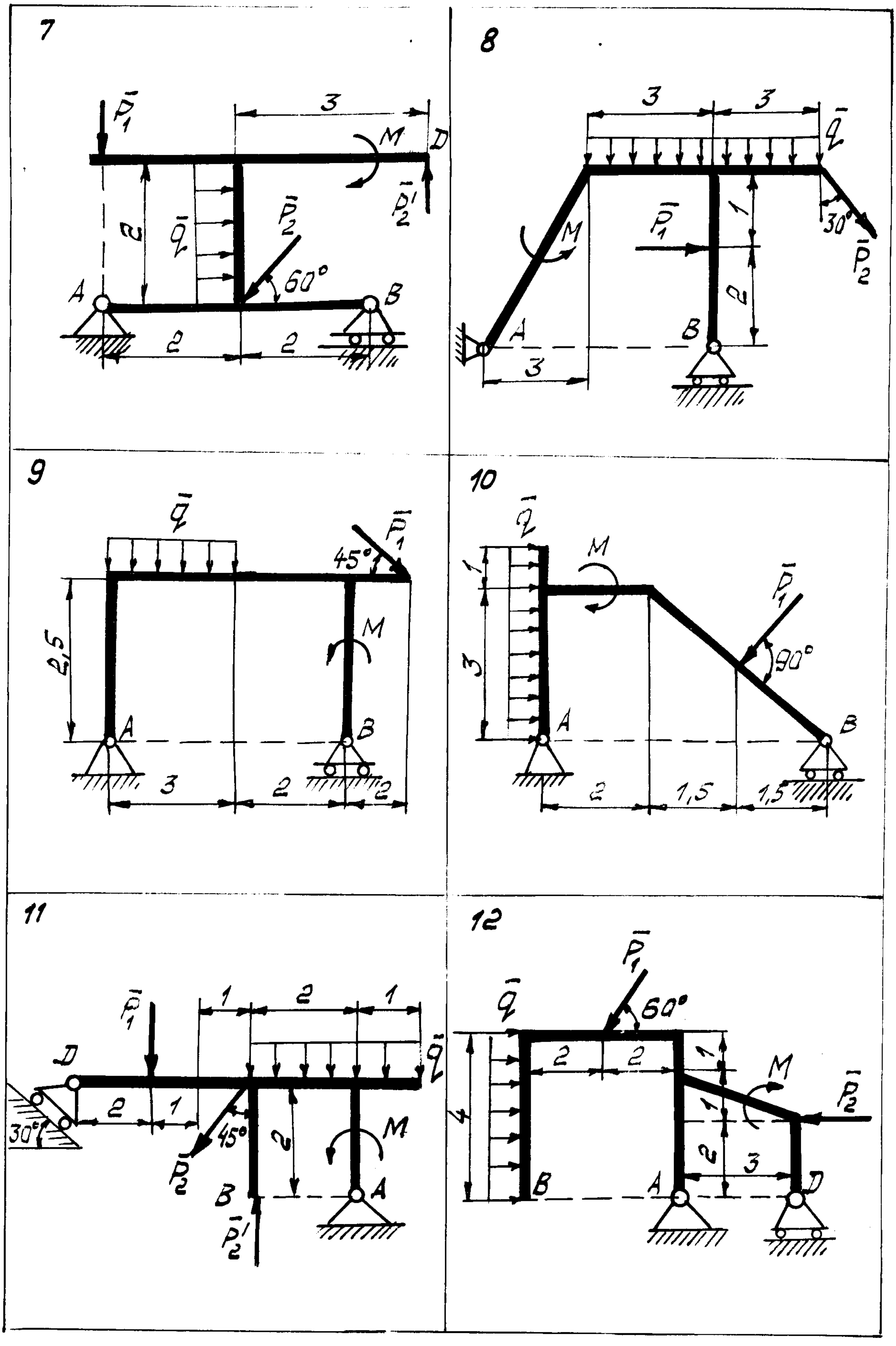

7
P1
3
M
D
a
q
P2
60°
P'2
A
B
2
2
8
3
3
q
M
P1
1
2
30°
P2
A
B
3
9
q
P1
45°
2,5
M
A
B
3
2
2
10
q
M
1
3
P1
90°
A
B
2
1,5
1,5
11
P1
1
2
1
D
q
2
1
30°
45°
2
M
P2
B
A
P'2
12
P1
60°
q
2
2
1
M
P2
4
1
2
3
B
A
D

Рис. 2

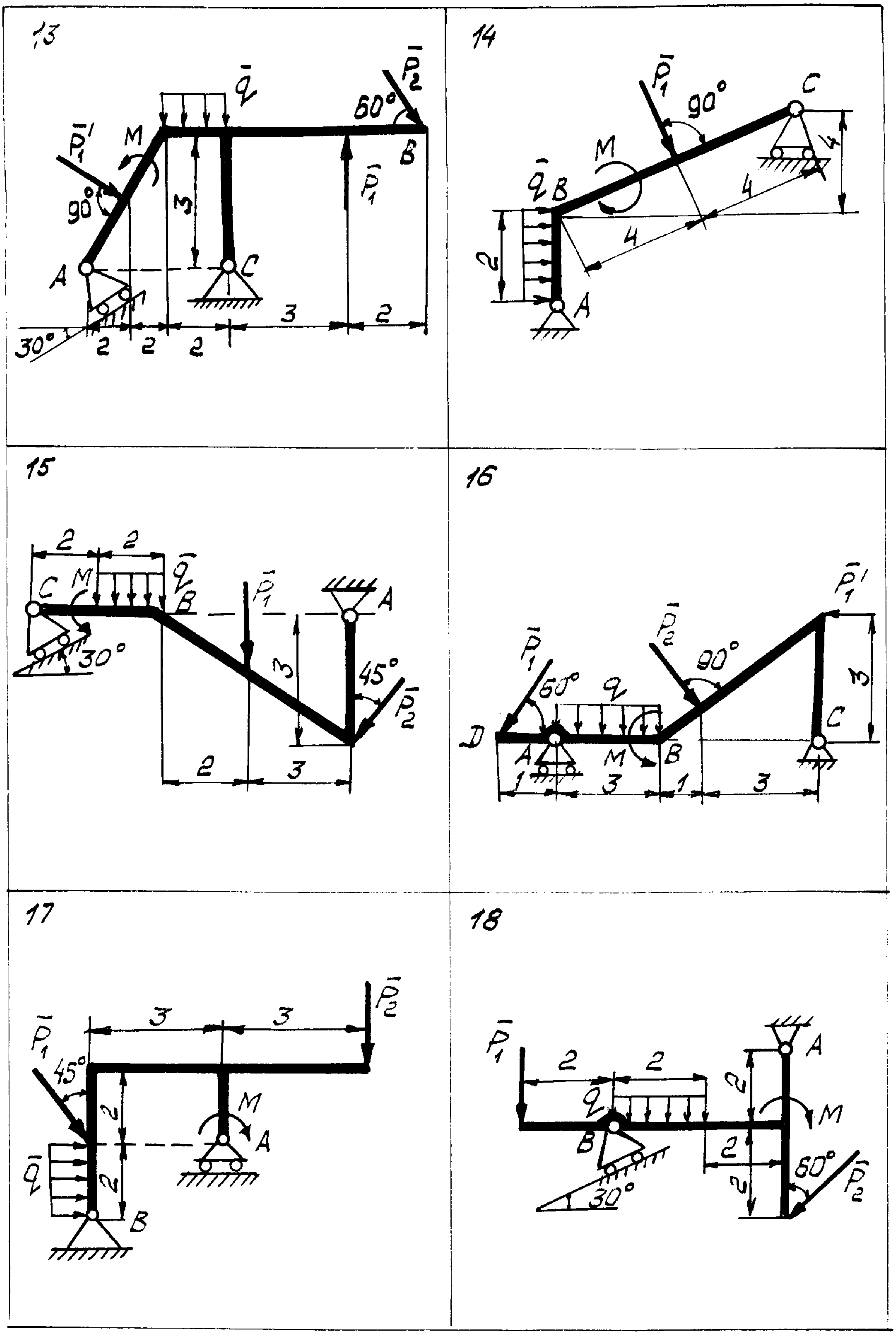


Рис. 3

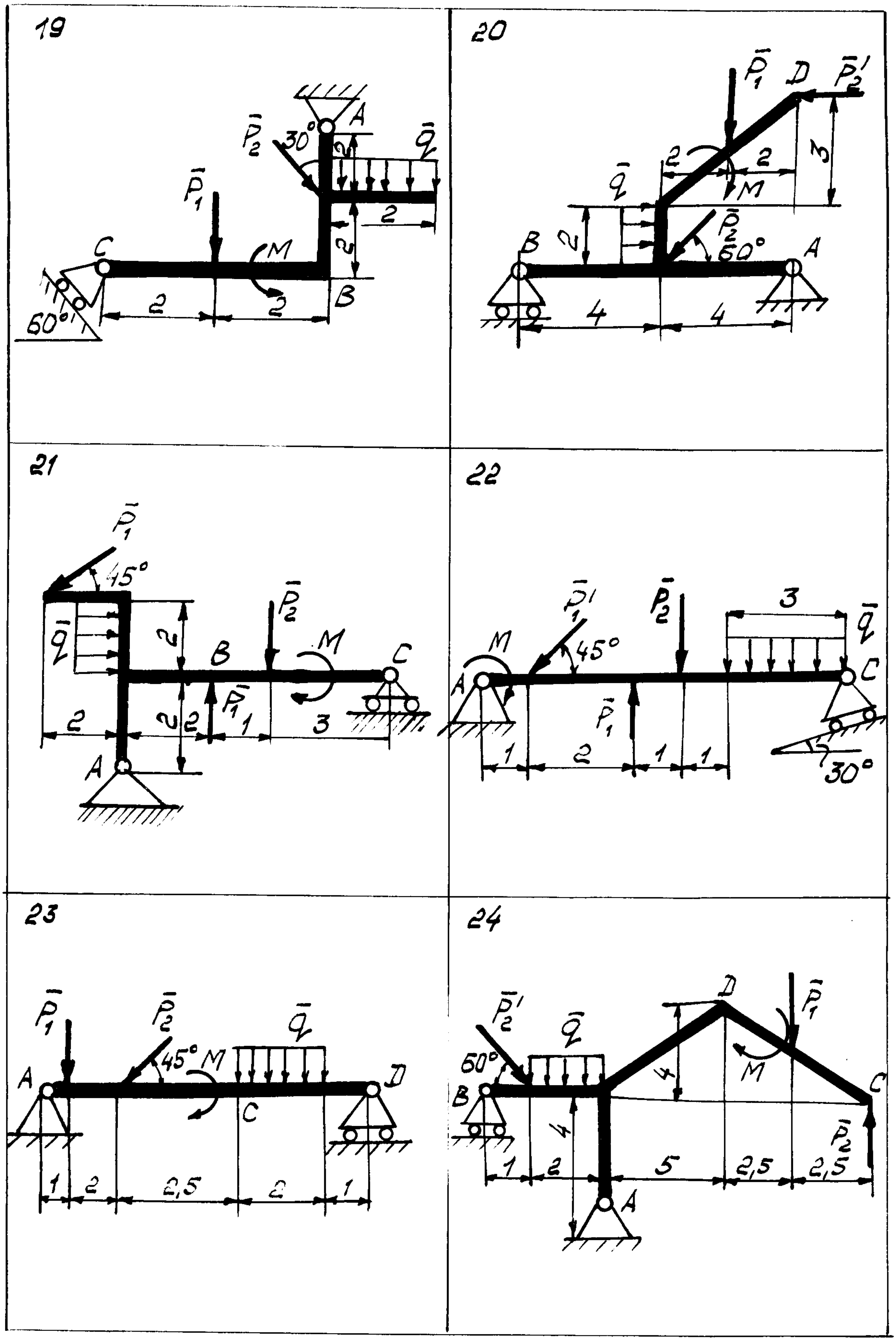


Рис. 4

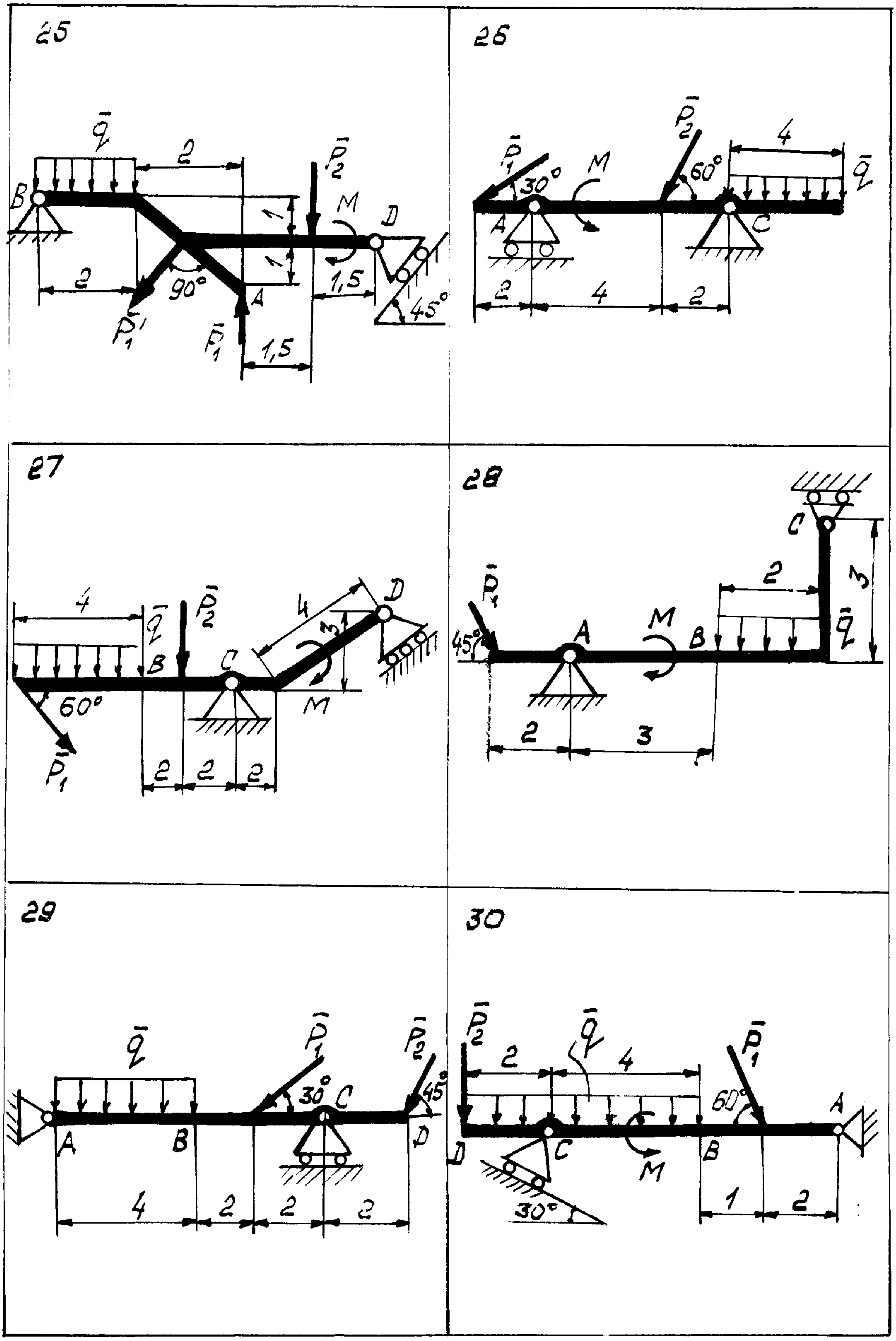


Рис. 5

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис.6); G = 10 *кН*; P = 5 *кН*; q = 0,5 *кН/м*; $\alpha = 30^o$, размеры – в *м*. Определить реакцию опоры A и реакцию стержня CD.

РЕШЕНИЕ

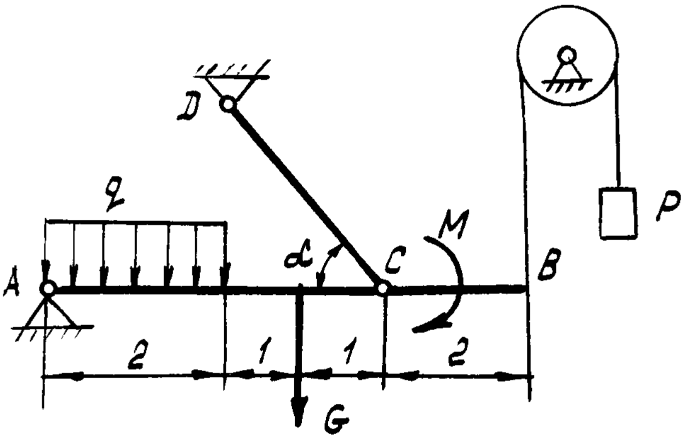


Рис. 6

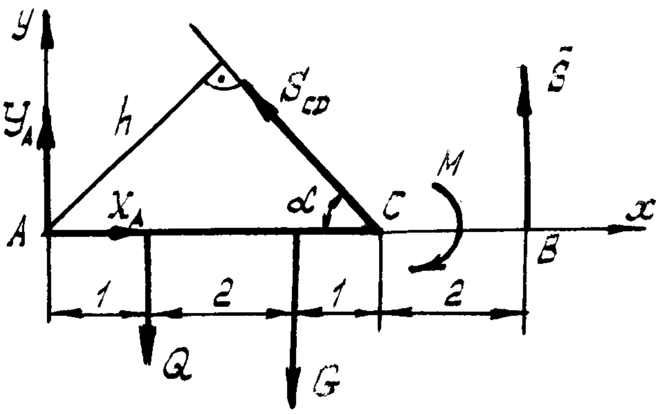


Рис. 7

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к балке AB. Отбрасываем связи: шарнирно-неподвижную опору A, стержень CD и нить. Действие связей на балку заменяем их реакциями (рис.7). Так как направление реакции шарнирно-неподвижной опоры A неизвестно, то определяем ее составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Покажем также реакцию $\vec{S}_{CD}$ стержня и реакцию $\vec{S}$ нити, модуль которой равен P. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем сосредоточенной силой $\vec{Q}$ с модулем $Q = 2q = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ *кН* и приложенной в центре тяжести эпюры этой нагрузки.

Для плоской системы сил, приложенных к балке, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0; \qquad X_A - S_{CD}\cos 30^o = 0; \tag{1}$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0; \qquad Y_A - Q - G + S_{CD}\cos 60^o + S = 0; \tag{2}$$

$$\sum_K m_A(\vec{F}_K) = 0; \qquad -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4 \cdot \sin 30^o - M + S \cdot 6 = 0; \tag{3}$$

Из уравнения (3)

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - S \cdot 6}{4 \cdot \sin 30^o} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0{,}5} = 4{,}5 кH.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = S_{CD} \cos 30^o = 4{,}5 \cdot 0{,}866 = 3{,}90 кH.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cos 60^o - S = 1 + 10 - 4{,}5 \cdot 0{,}5 - 5 = 3{,}75 кH.$$

Значения X_A , Y_A , S_{CD} получаются положительными, это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

ЗАДАНИЕ С-2

Определение реакций опор составной конструкции.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С заданной составной конструкции. Схемы конструкции представлены на рис. 8–12, а необходимые данные - в таблице 2.

Таблица 2

№№ п/п	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	a, м	α, град.	β, град.
1	10	5	1,4	1,0	45	30
2	12	8	1,0	2,0	60	15
3	15	4	0,8	1,5	30	15
4	14	6	1,8	1,0	75	30
5	20	4	1,4	2,0	60	15
6	16	10	1,2	1,0	30	15
7	18	8	1,6	1,5	60	30
8	20	12	2,2	1,0	75	30
9	22	6	1,2	2,0	45	30
10	30	8	2,4	1,5	30	15
11	10	5	1,4	1,0	45	30
12	12	8	1,0	2,0	60	15
13	15	4	0,8	1,5	30	15
14	14	6	1,8	1,0	75	30
15	20	4	1,4	2,0	60	15
16	16	10	1,2	1,0	30	15
17	18	8	1,6	1,5	60	30
18	20	12	2,2	1,0	75	30
19	22	6	1,2	2,0	45	30
20	30	8	2,4	1,5	30	15
21	10	5	1,4	1,0	45	30
22	12	8	1,0	2,0	60	15
23	15	4	0,8	1,5	30	15
24	14	6	1,8	1,0	75	30
25	20	4	1,4	2,0	60	15
26	16	10	1,2	1,0	30	15
27	18	8	1,6	1,5	60	30
28	20	12	2,2	1,0	75	30
29	22	6	1,2	2,0	45	30
30	30	8	2,4	1,5	30	15

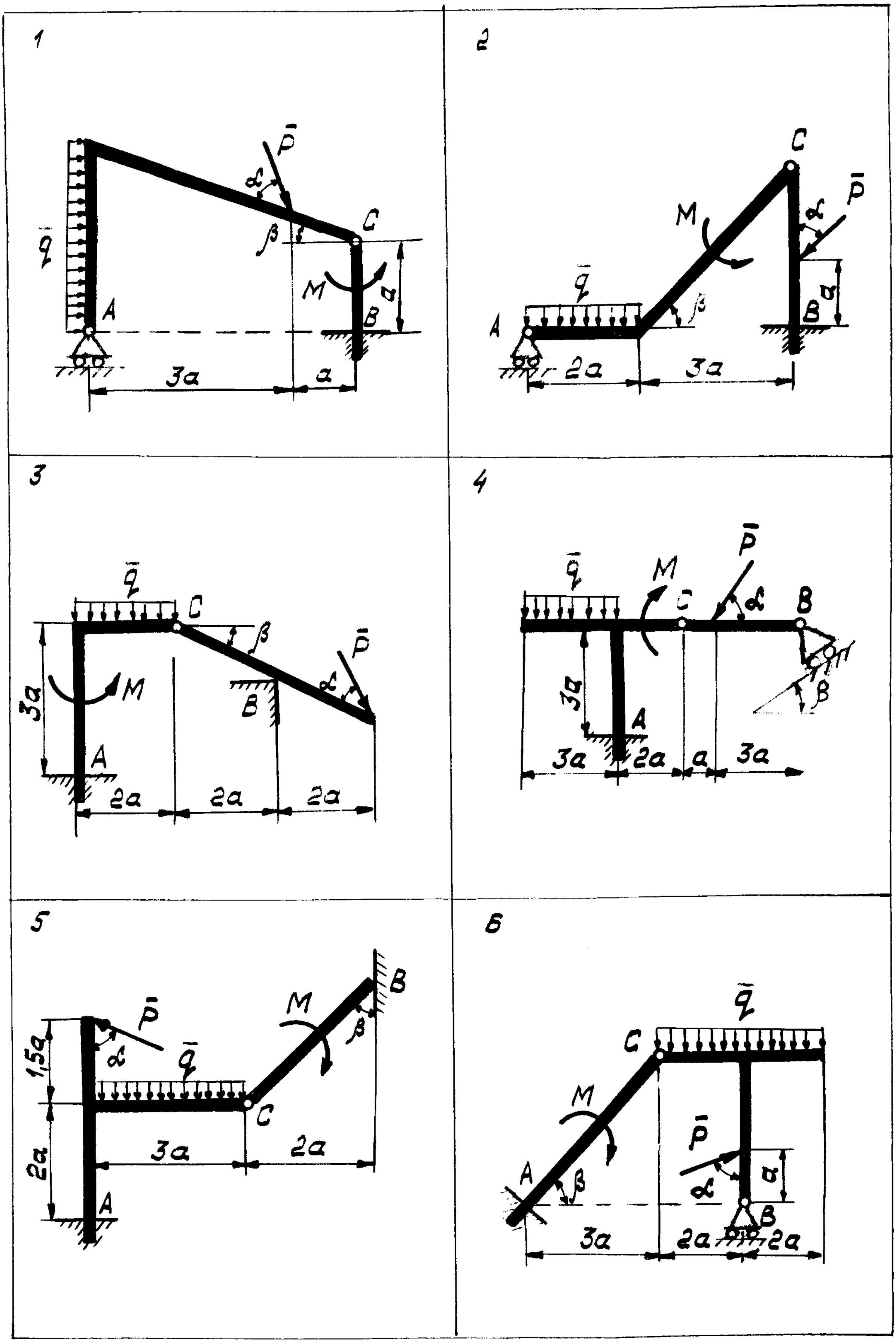

1
P
α
β
C
q
M
a
A
B
3a
a
2
C
P
α
M
q
β
a
A
B
2a
3a
3
q
C
β
P
α
3a
M
B
A
2a
2a
2a
4
q
M
P
C
α
B
3a
A
β
3a
2a
a
3a
5
B
M
P
1,5a
α
q
β
C
2a
A
3a
2a
6
q
C
M
P
a
A
β
α
B
3a
2a
2a

Рис. 8

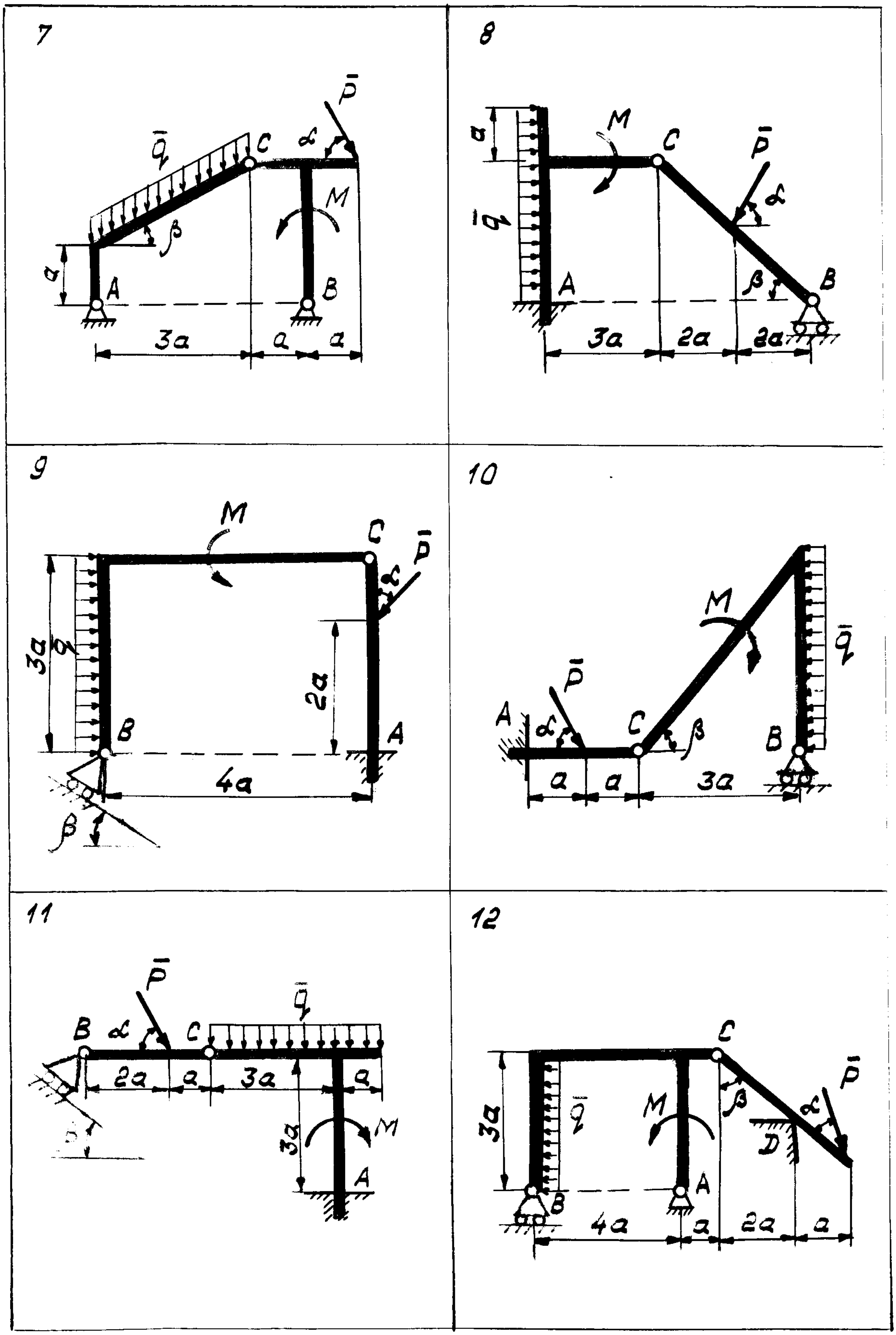

7
q̄
C
α
P̄
M
β
a
A
B
3a
a
a
8
a
M
C
P̄
q̄
α
A
β
B
3a
2a
2a
9
M
C
P̄
α
3a
q̄
2a
B
A
4a
β
10
M
q̄
P̄
A
α
C
β
B
a
a
3a
11
P̄
q̄
B
α
C
2a
a
3a
a
3a
M
A
12
C
P̄
3a
q̄
M
β
α
D
A
B
4a
a
2a
a

Рис. 9

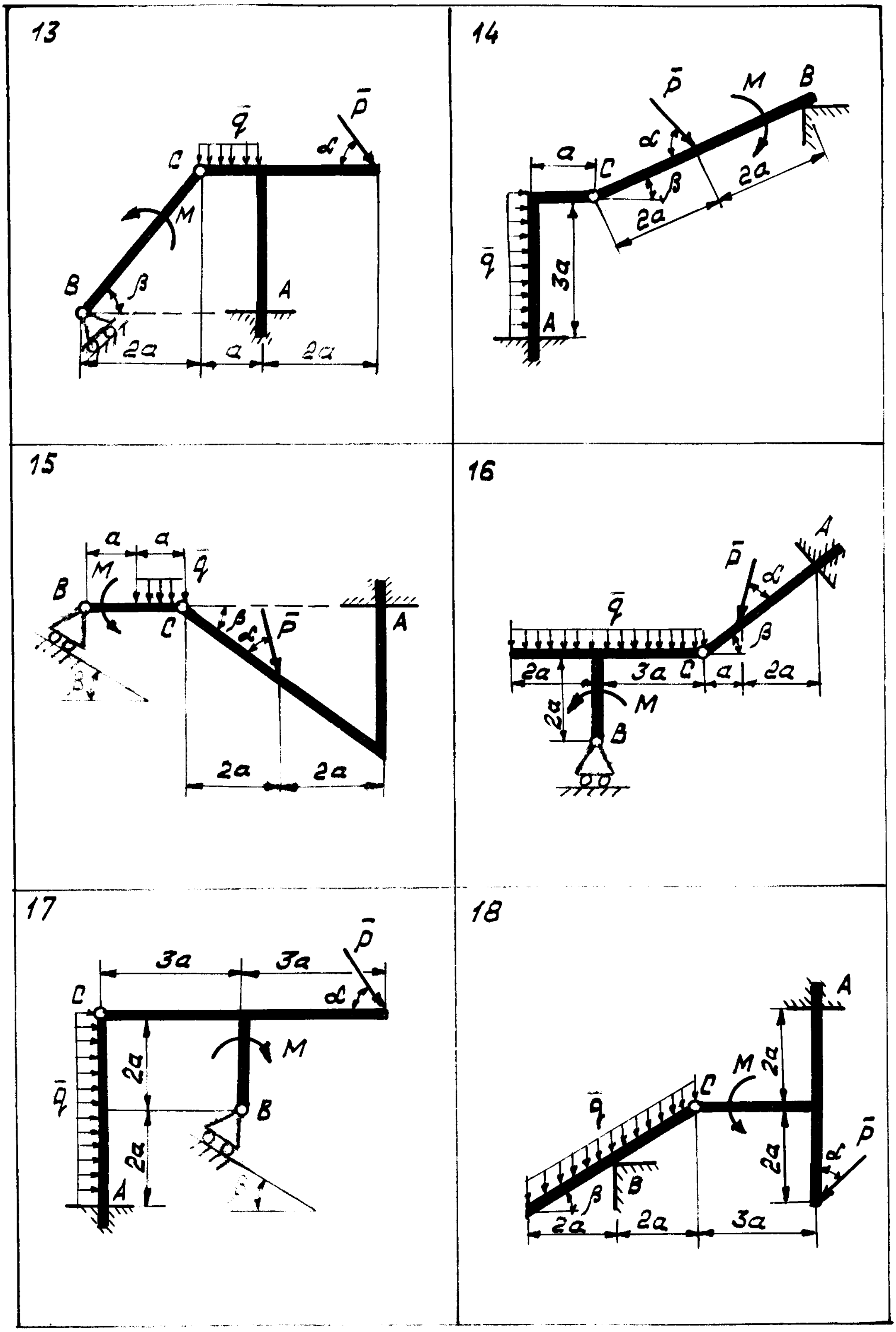


Рис. 10

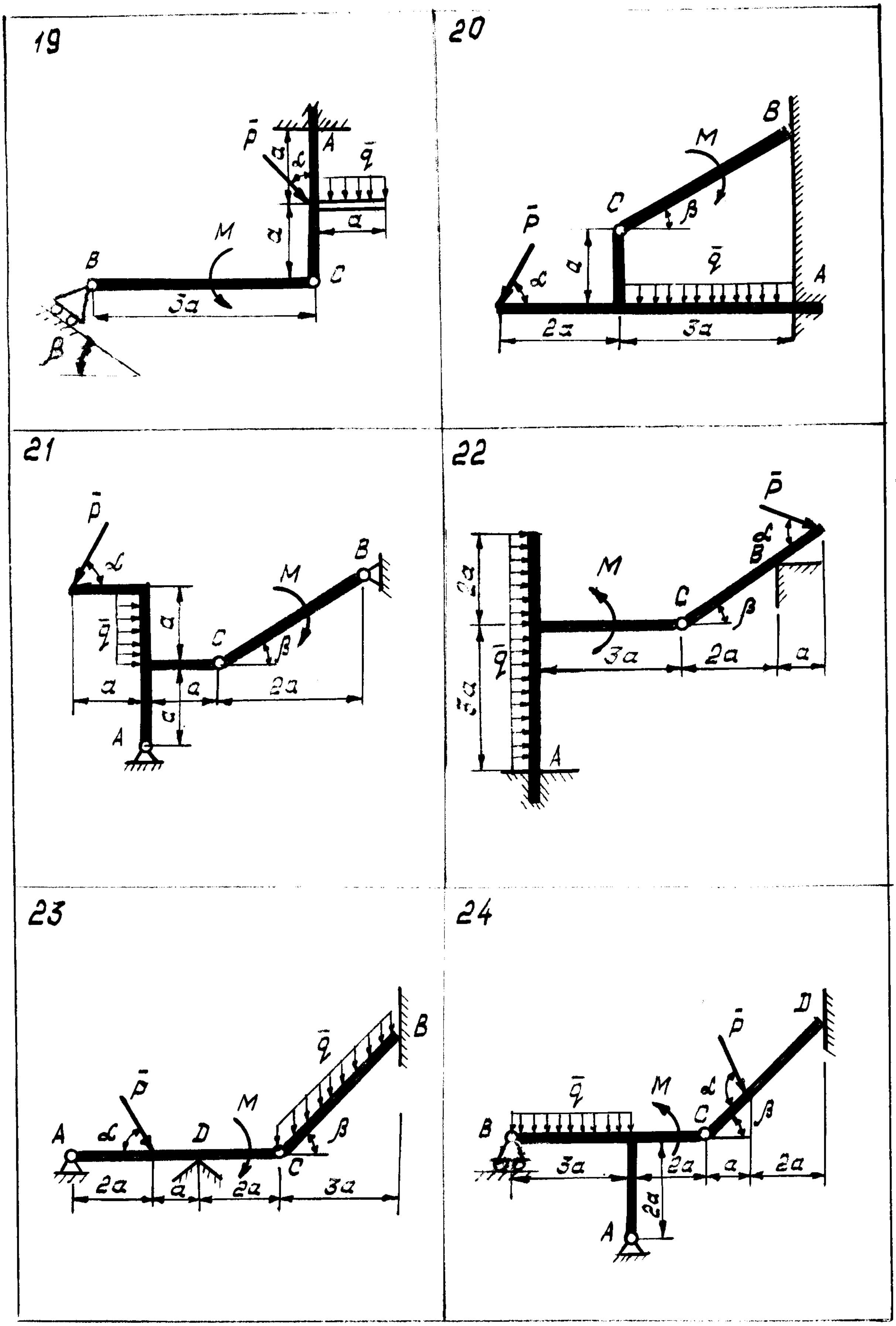


Рис. 11

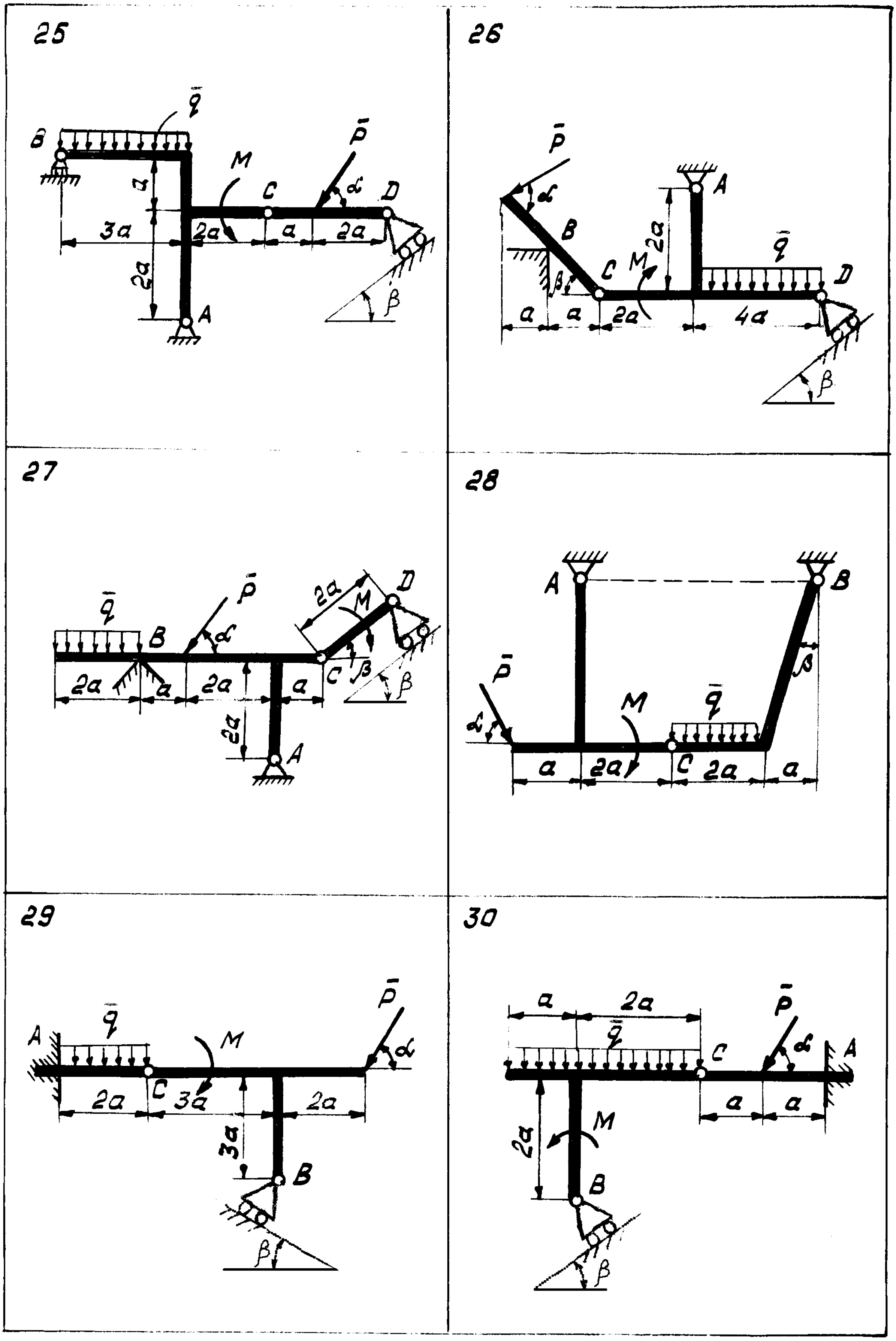

25
B
q̄
M
C
P̄
α
D
a
3a
2a
a
2a
2a
A
β
26
P̄
α
A
B
C
M
2a
q̄
D
β
a
a
2a
4a
β
27
q̄
B
P̄
α
2a
D
M
C
β
2a
a
2a
a
2a
A
β
28
A
B
P̄
α
M
q̄
β
a
2a
C
2a
a
29
A
q̄
M
P̄
α
C
2a
3a
2a
3a
B
β
30
a
2a
q̄
C
P̄
α
A
a
a
2a
M
B
β

Рис. 12

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис. 13а); P = 8 $кН$; M = 20 $кНм$; q = 2 $кН/м$; a = 1 м; $\alpha = 60^{o}$; $\beta = 30^{o}$. Определить реакции опор А и В и давление в промежуточном шарнире С.

РЕШЕНИЕ

Данная конструкция состоит из двух тел, сочлененных шарниром С. Задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Мысленно освобождаемся от связей, наложенных на каждое из тел, заменяя их на соответствующие реакции. Рассматриваем системы уравновешивающихся сил, приложенных к каждому телу в отдельности.

На первое тело (рис. 13б) действуют: сила $\vec{P}$, пара сил с моментом M, реакция опоры A и давление балки CD в точке С. Реакция жесткой заделки А представляется силами $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и парой сил с моментом M_A, а давление балки CD - составляющими $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$. Указанные силы расположены на плоскости произвольным образом, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 \quad ; \qquad X_A + X_C - P\cdot\cos a = 0 \quad ; \tag{1}$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 \quad ; \qquad Y_A + Y_C - P\cdot\sin a = 0 \quad ; \tag{2}$$

$$\sum_K m_0(\vec{F}_K) = 0 \quad ; \quad X_A\cdot OA + M_A + Y_C\cdot OC - M + P\cdot OK = 0 \quad ; \tag{3}$$

где $OA = 2\cdot a = 2м$, $OC = 1{,}5\cdot a = 1{,}5м$,

$$OK = a\cdot\sin a = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87м \quad .$$

На второе тело (рис. 13в) действуют: распределенные силы интенсивности q , реакция опоры В и давление первого тела в точке С. Равномерно распределенные силы заменяем их равнодействующей $\vec{Q}$, приложенной в середине участка CD и направленной по вертикали вниз. Ее модуль определяется по формуле:

$$Q = q\cdot CD = 2\cdot 3{,}5 = 7\ кН.$$

Реакция $\vec{N}_B$ опоры В перпендикулярна к балке CD, а давление первого тела представляется составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия

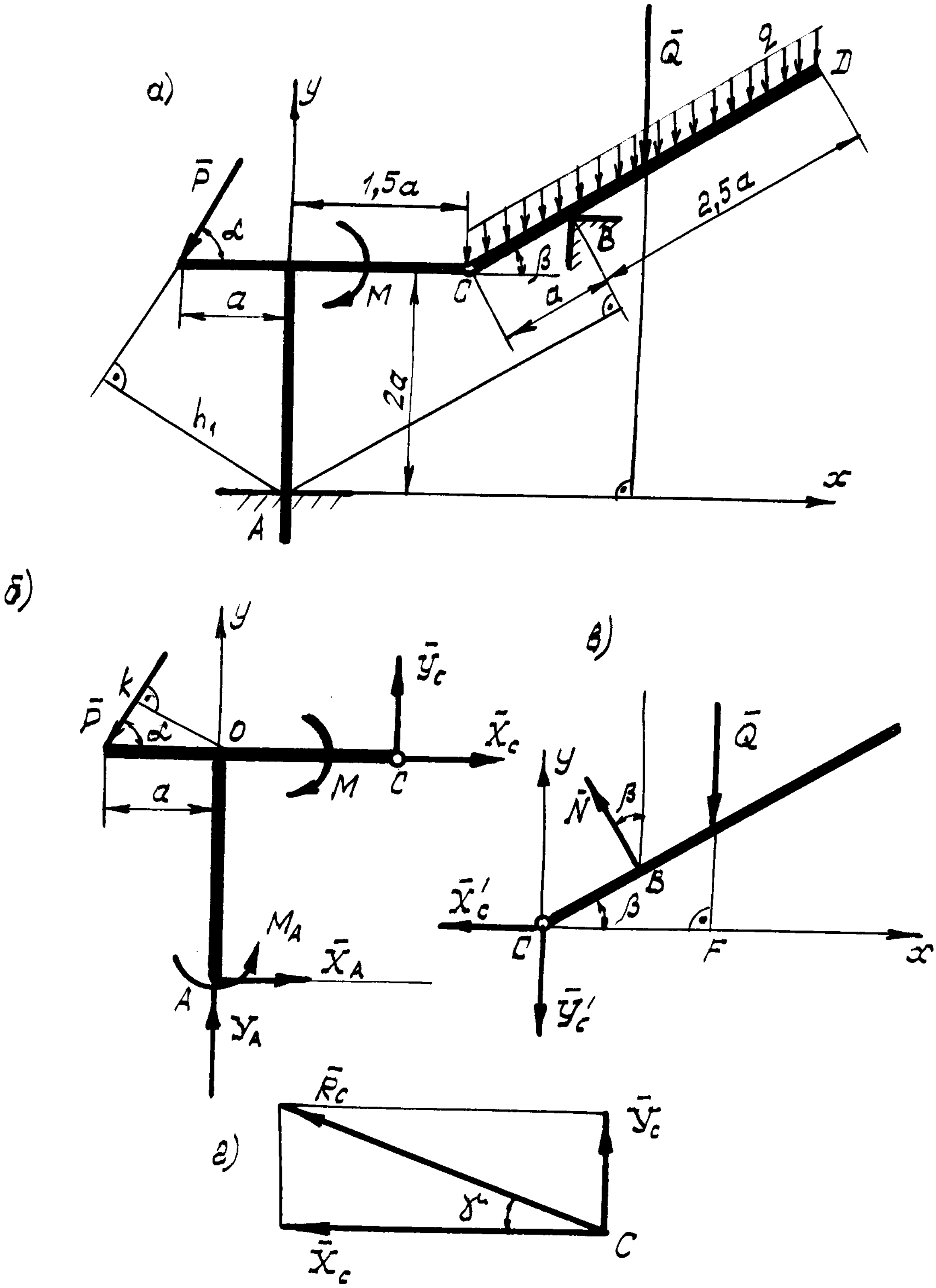

а)
y
$\bar{P}$
α
1,5a
$\bar{Q}$
q
D
2,5a
M
C
β
E
B
a
a
2a
h_1
x
A
б)
y
$\bar{Y}_c$
k
$\bar{P}$
α
O
$\bar{X}_c$
a
M
C
M_A
$\bar{X}_A$
A
Y_A
в)
$\bar{Q}$
y
$\bar{N}$
β
B
$\bar{X}'_c$
β
C
F
x
$\bar{Y}'_c$
$\bar{R}_c$
$\bar{Y}_c$
г)
γ
C
$\bar{X}_c$

Рис. 13

$$X'_C = X_C \quad \text{и} \quad \vec{X}'_C \uparrow\downarrow \vec{X}_C,$$
$$Y'_C = Y_C \quad \text{и} \quad \vec{Y}'_C \uparrow\downarrow \vec{Y}_C.$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к балке CD имеют вид:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 \;; \qquad -X'_C - N_B \cdot \sin b = 0 \;; \tag{4}$$
$$\sum_K F_{Ky} = 0 \;; \qquad -Y'_C + N_B \cdot \cos b - Q = 0 \;; \tag{5}$$
$$\sum_K m_C(\vec{F}_K) = 0 \;; \quad N_B \cdot CB - Q \cdot CF = 0 \;; \tag{6}$$

где $CB = a = 1$ *м*, $CF = \dfrac{CD}{2} \cdot \cos b = \dfrac{3{,}5}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}52$ *м*.

Уравнения равновесия (1)-(6) образуют полную систему уравнений, откуда определяются все шесть неизвестных величин: X_A, Y_A, M_A, X_C, Y_C, N_B.

Из уравнения (6) находим

$$N_B = Q \cdot \frac{CF}{CB} = 7 \cdot \frac{1{,}52}{1} = 10{,}64 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5)

$$Y'_C = N_B \cdot \cos b - Q = 10{,}64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 2{,}21 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4)

$$X'_C = -N_B \sin b = -10{,}64 \cdot \frac{1}{2} = -5{,}32 \text{ кН}.$$

Отрицательный знак указывает, что в действительности сила $\vec{X}'_C$ (соответственно и $\vec{X}_C$) будет направлена в сторону противоположную принятой. Истинные направления сил $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$, представляющих собой составляющие давления $\vec{R}_C$ балки CD на первое тело конструкции, показаны на рис. 13г.

Модуль $\vec{R}_C$ и угол определяются по формулам:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{(5{,}32)^2 + (2{,}21)^2} = 5{,}76 \text{ кН},$$
$$g = arctg \frac{|Y_C|}{|X_C|} = arctg 0{,}4154 = 22^o 34'.$$

Далее из уравнения (1) находим

$$X_A = P \cdot \cos a - X_C = 8 \cdot \frac{1}{2} + 5{,}32 = 9{,}32 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = P \cdot \sin a - Y_C = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2{,}21 = 4{,}72 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3)

$$M_A = -X_A \cdot OA - Y_C \cdot OC + M - P \cdot OK =$$
$$= -9{,}32 \cdot 2 - 2{,}21 \cdot 1{,}5 + 20 - 8 \cdot 0{,}87 = -8{,}92 \text{ кН·м}.$$

Отрицательный знак указывает, что направление вращения пары в опоре А в действительности противоположно выбранному.

Второй способ. Рассматриваем систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис.13а). На конструкцию действуют: сила $\vec{P}$, пара сил с моментом М, равнодействующая $\vec{Q}$ распределенных сил и реакции опор А и В ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{N}_B$). При рассмотрении всей конструкции в целом давления в шарнире С ($\vec{X}_C, \vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C, \vec{Y}'_C$) не рассматриваются.

Уравнениями равновесия для указанной системы сил будут:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 \ ; \qquad X_A - P \cdot \cos\alpha - N_B \cdot \sin\beta = 0 \ ; \tag{7}$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 \ ; \qquad Y_A - P \cdot \sin\alpha + N_B \cdot \cos\beta - Q = 0 \ ; \tag{8}$$

$$\sum_K m_A(\vec{F}_K) = 0 \ ; \quad M_A + P \cdot h_1 - M + N_B \cdot h_2 - Q \cdot h_3 = 0 \ ; \tag{9}$$

где $h_1 = a \cdot \sin\alpha + 2 \cdot a \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}87$ м,

$$h_2 = a + 1{,}5a \cdot \cos\beta + 2a \cdot \sin\beta = 1 + 1{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}30 \text{ м},$$

$$h_3 = 1{,}5a + 1{,}75a \cdot \cos\beta = 1{,}5 + 1{,}75 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}02 \text{ м}.$$

Далее следует рассматривать систему уравновешивающихся сил, приложенных к одному из тел конструкции, при этом целесообразно выбрать ту часть конструкции, на которую действует меньшее число сил. В данном случае рассматриваем систему сил, действующих на балку CD, условия равновесия которой выражаются уравнениями (4) – (6).

Таким образом, для определения шести неизвестных величин будем иметь систему уравнений (4) – (9).

В заключении отметим, что уравнения (7) – (9) могут быть использованы для проверки результатов решения задачи первым способом, а уравнения (1) – (3) - вторым способом.

ЗАДАНИЕ С-3

Приведение пространственной системы сил к заданному центру.

Определить главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_0$ заданной системы сил относительно центра О. Схемы вариантов приведены на рис. 14–18, необходимые данные - в таблице 3.

Таблица 3.

№№ п/п	a=OE, м	b=OL, м	c=OB, м	F_1, Н	F_2, Н	F_3, Н	F_4, Н	F_5, Н	α, град	β, град	M, Нм
1	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
2	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
3	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
4	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
5	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
6	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
7	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
8	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
9	15	20	15	33	46	44	46	55	60	30	10
10	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20
11	45	60	45	12	54	16	54	20	30	60	30
12	60	80	60	15	58	20	58	25	15	75	40
13	15	20	15	18	17	24	17	30	60	30	10
14	30	40	30	21	19	28	19	35	75	15	20
15	45	60	45	24	21	32	21	40	30	60	30
16	60	80	60	27	23	36	23	45	15	75	40
17	15	20	15	30	25	40	25	50	60	30	10
18	30	40	30	33	27	44	27	55	75	15	20
19	45	60	45	36	29	48	29	60	30	60	30
20	60	80	60	9	31	12	31	15	15	75	40
21	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
22	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
23	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
24	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
25	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
26	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
27	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
28	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
29	15	20	15	33	45	44	46	55	60	30	10
30	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20

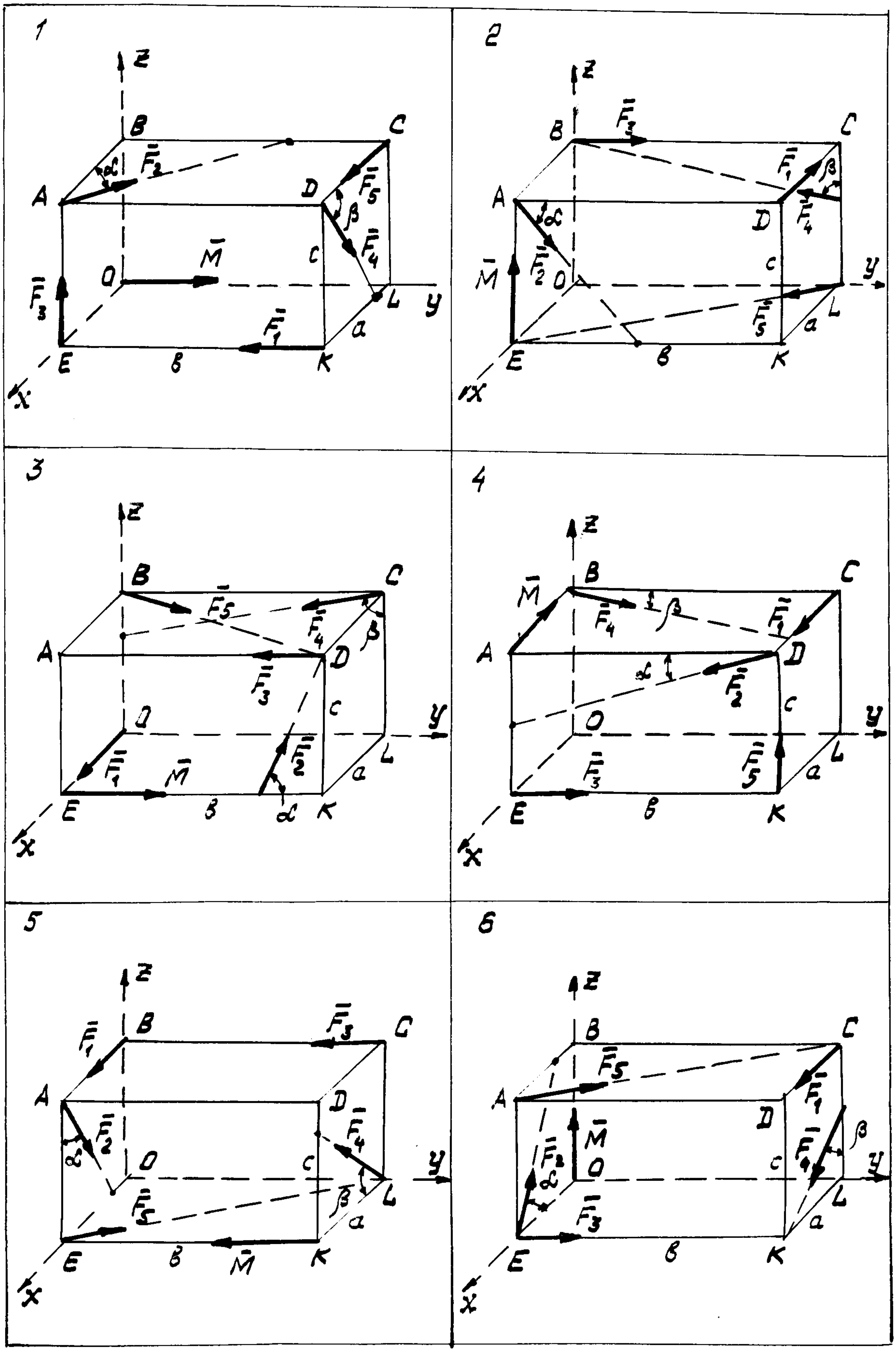


Рис. 14

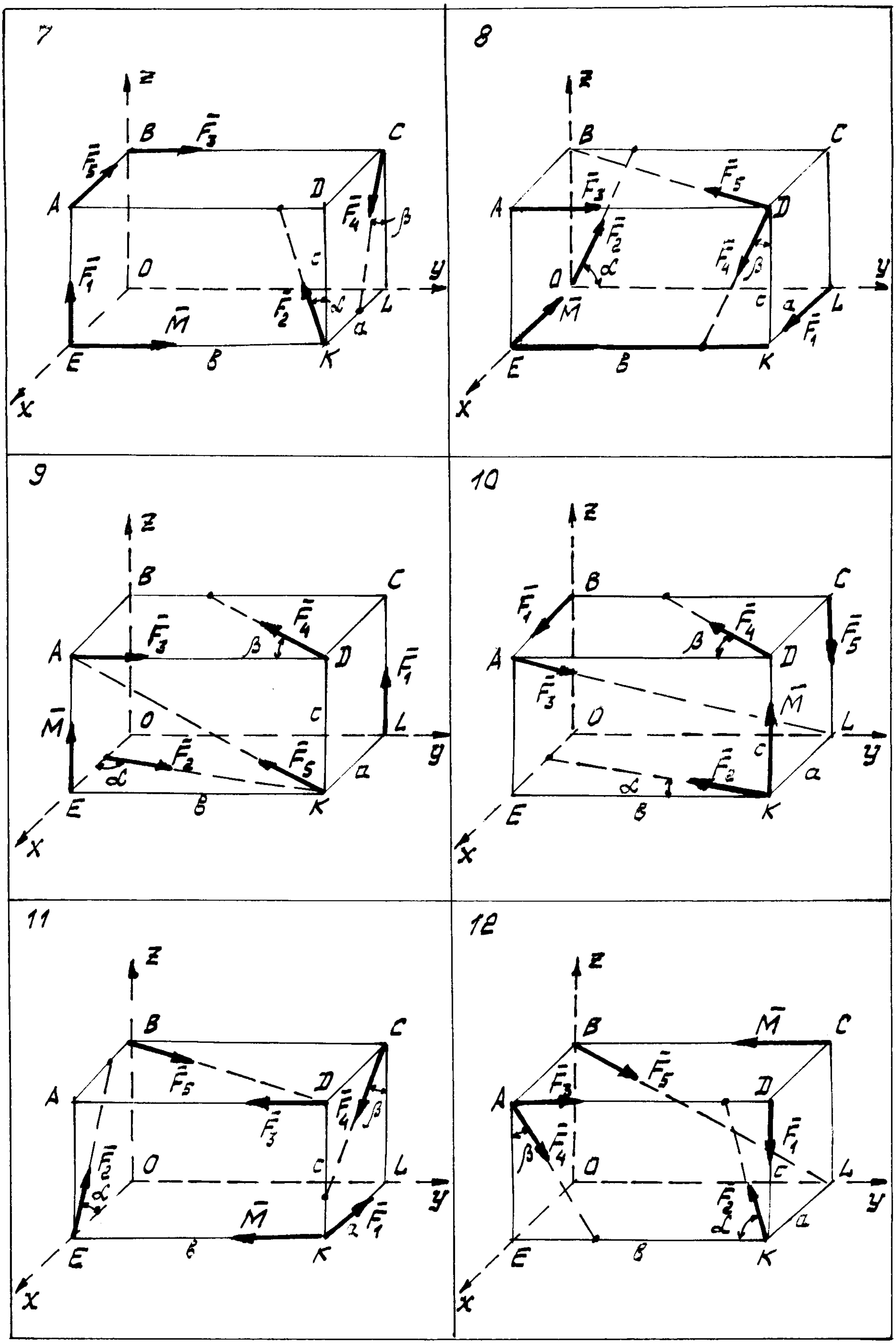

7
8
9
10
11
12
z
y
x
A
B
C
D
E
K
L
O
a
в
c
$\bar{F}_1$
$\bar{F}_2$
$\bar{F}_3$
$\bar{F}_4$
$\bar{F}_5$
$\bar{M}$
α
β

Рис. 15

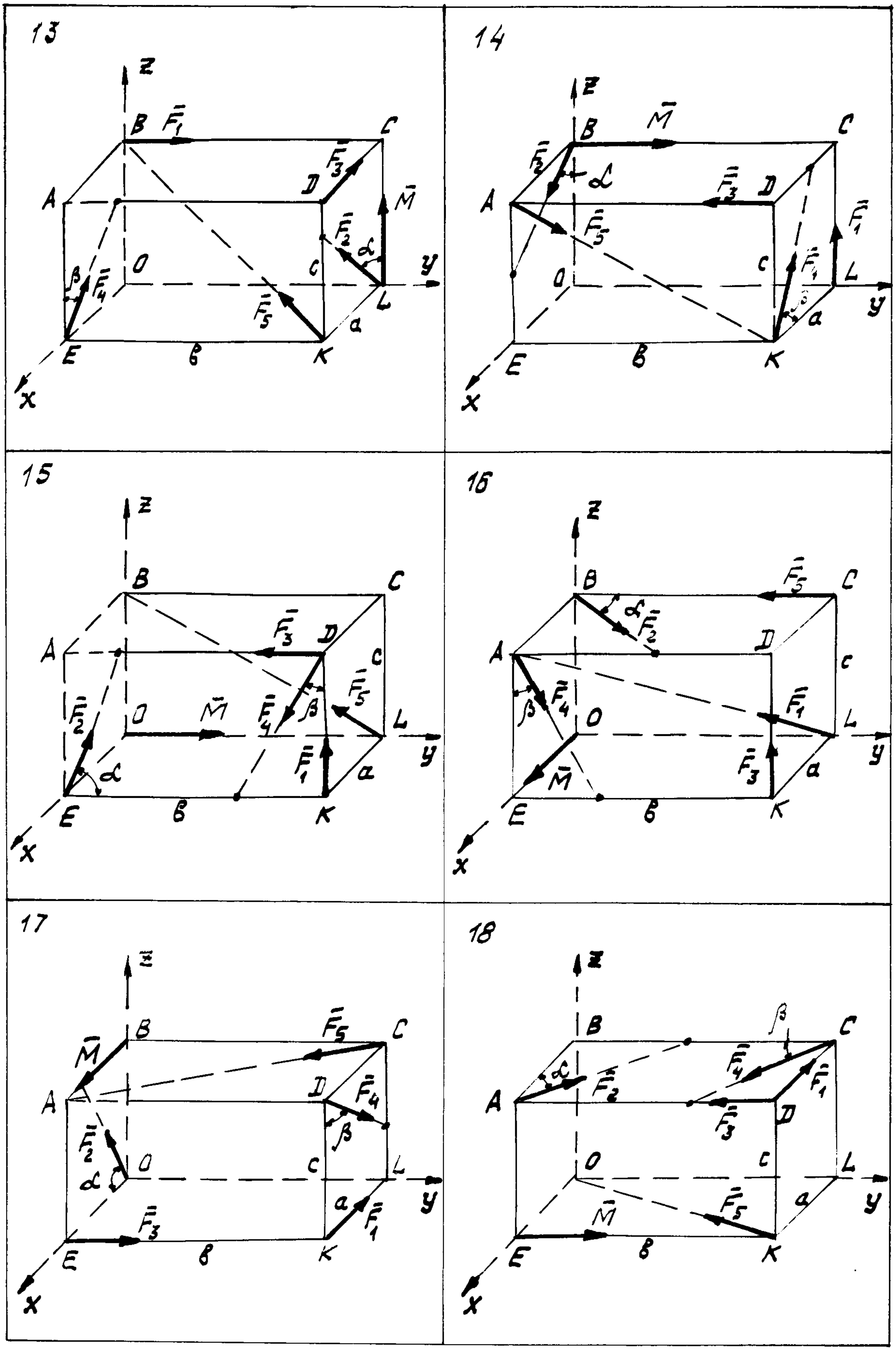


Рис. 16

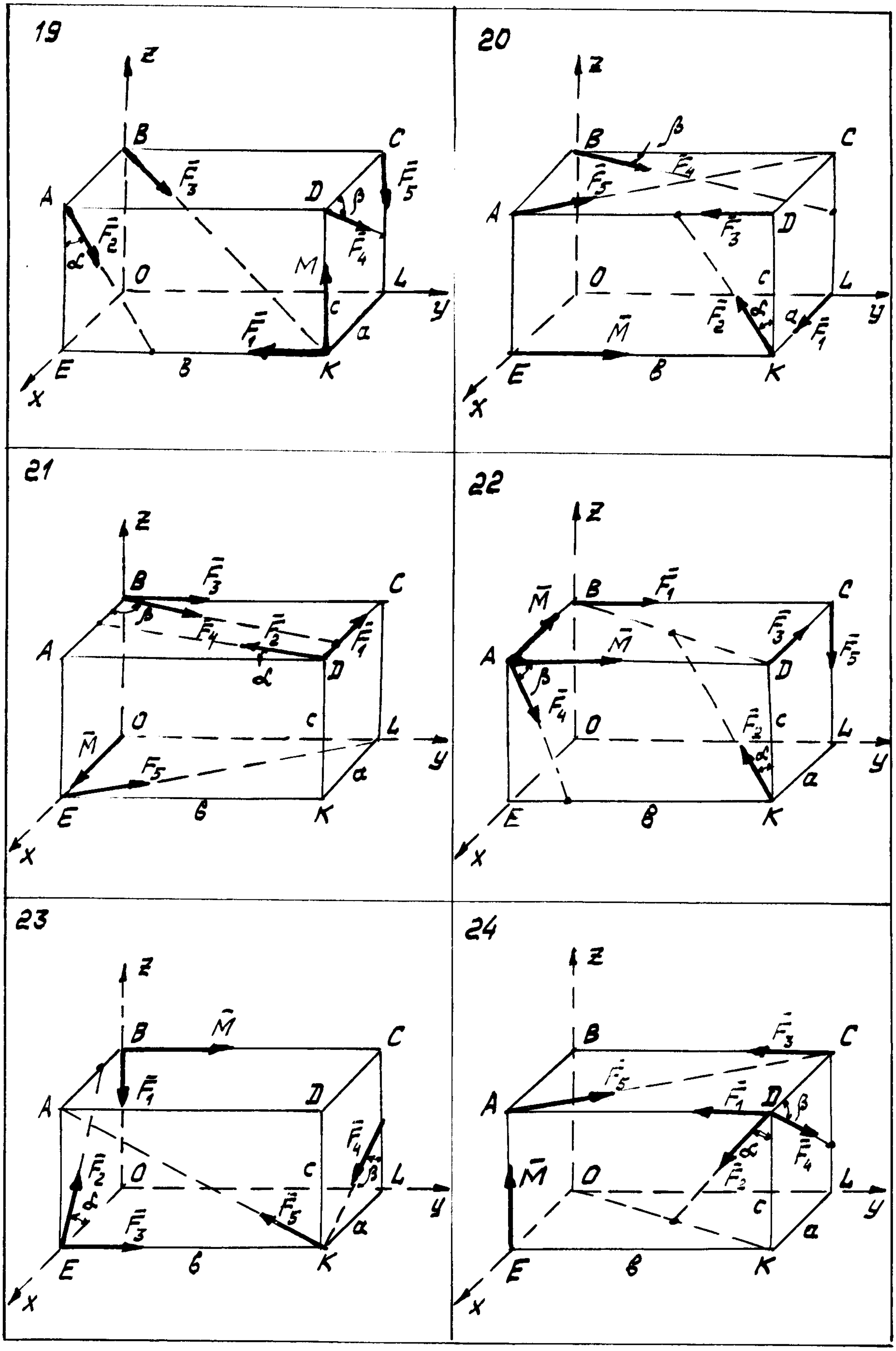


Рис. 17

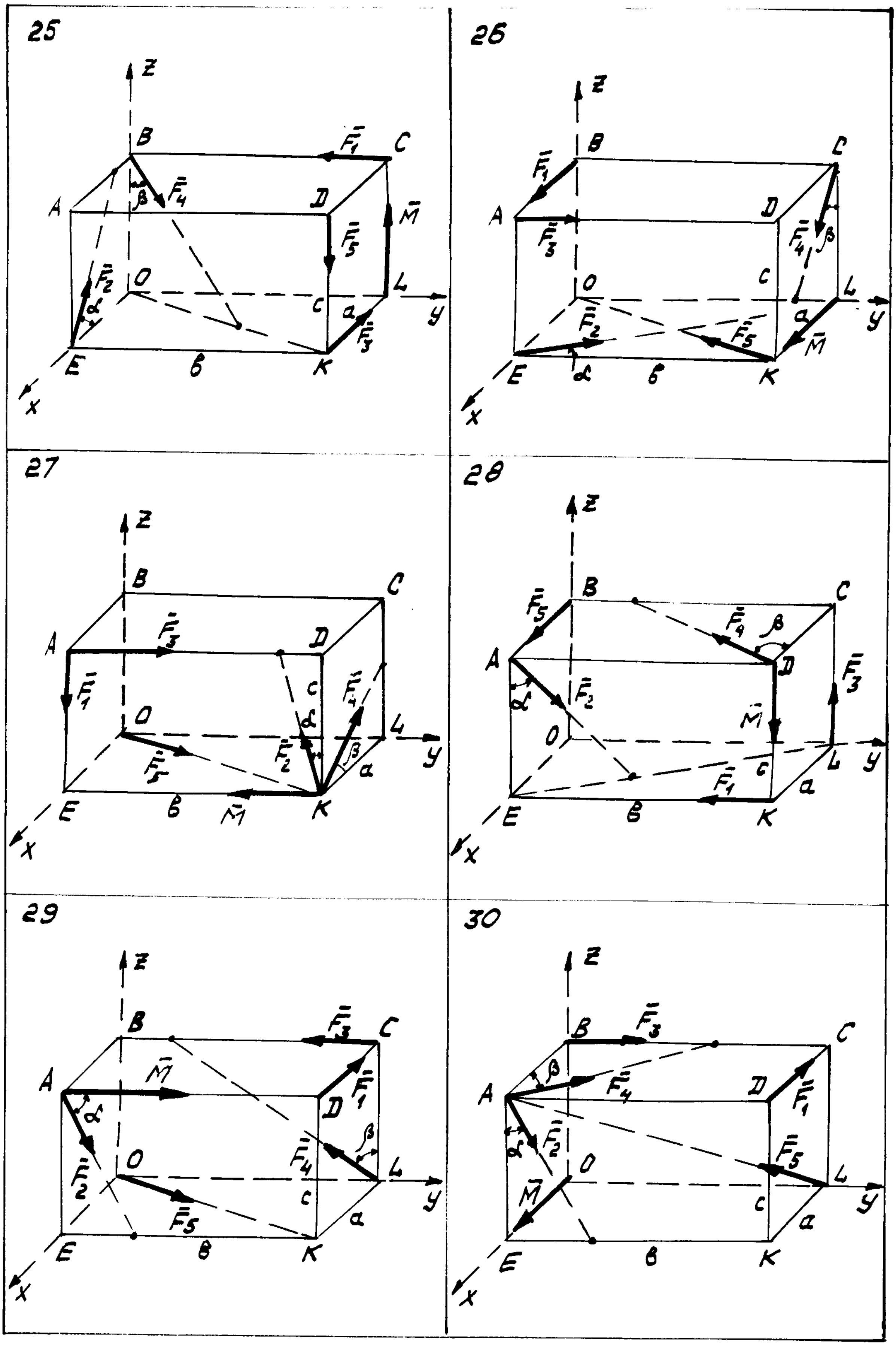


Рис. 18

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: $F_1 = 15$ *Н*; $F_2 = 60$ *Н*; $F_3 = 30$ *Н*; $F_4 = 20$ *Н*; $F_5 = 25$ *Н*; $M = 10$ *Нм*; $a = 0{,}5$ *м*; $b = 0{,}4$ *м*; $c = 0{,}3$ *м*; $\alpha = 60^0$; $\beta = 30^0$ (рис. 19а).

РЕШЕНИЕ

Прежде, чем приступить к определению главного вектора $\vec{R}$ заданной системы сил и ее главного момента $\vec{M}_0$ относительно начала координат, введем углы γ, φ и разложим силу $\vec{F}_4$ на две составляющие: $\vec{F}_4'$ – на плоскости XOY и $\vec{F}_4^{(3)}$ - перпендикулярно к ней (рис.19а).

$$F_4' = F_4 \cdot \sin\beta = 10 \quad \text{Н}, \qquad F_4^{(3)} = F_4 \cdot \cos\beta = 17{,}32 \quad \text{Н}.$$

Проекцию силы $\vec{F}_4$ на ось найдем, как сумму проекций составляющих $\vec{F}_4'$ и $\vec{F}_4^{(3)}$, а ее момент относительно оси, согласно теореме Вариньона, будет равен сумме моментов $\vec{F}_4'$ и $\vec{F}_4^{(3)}$ относительно этой же оси.

Для проекций главного вектора на координатные оси получим выражения:

$$R_x = \sum_{k=1}^{5} F_{kx} = -F_1 + F_2 \cdot \cos\varphi + F_4' \cdot \sin\gamma \quad , \tag{1}$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{5} F_{ky} = F_3 \cdot \cos\alpha - F_4' \cdot \cos\gamma - F_5 \quad , \tag{2}$$

$$R_z = \sum_{k=1}^{5} F_{kz} = -F_2 \cdot \sin\varphi + F_3 \cdot \sin\alpha + F_4^{(3)} \quad , \tag{3}$$

где

$$\sin\gamma = \frac{OA}{AD} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0{,}78 \quad , \qquad \cos\gamma = \frac{OD}{AD} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0{,}62 \quad ,$$

$$\sin\varphi = \frac{ON}{AN} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0{,}51 \quad , \qquad \cos\varphi = \frac{OA}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0{,}86 \quad .$$

Подставив в (1) – (3) выражения для $\vec{F}_4'$ и $\vec{F}_4^{(3)}$, заданные значения F_1, F_2, …, F_5, α, β, а также найденные значения тригонометрических функций углов φ и γ, получим

$$R_x = 44{,}27 \quad \text{Н}, \qquad R_y = -16{,}25 \quad \text{Н}, \qquad R_z = 12{,}31 \quad \text{Н}.$$

Модуль главного вектора

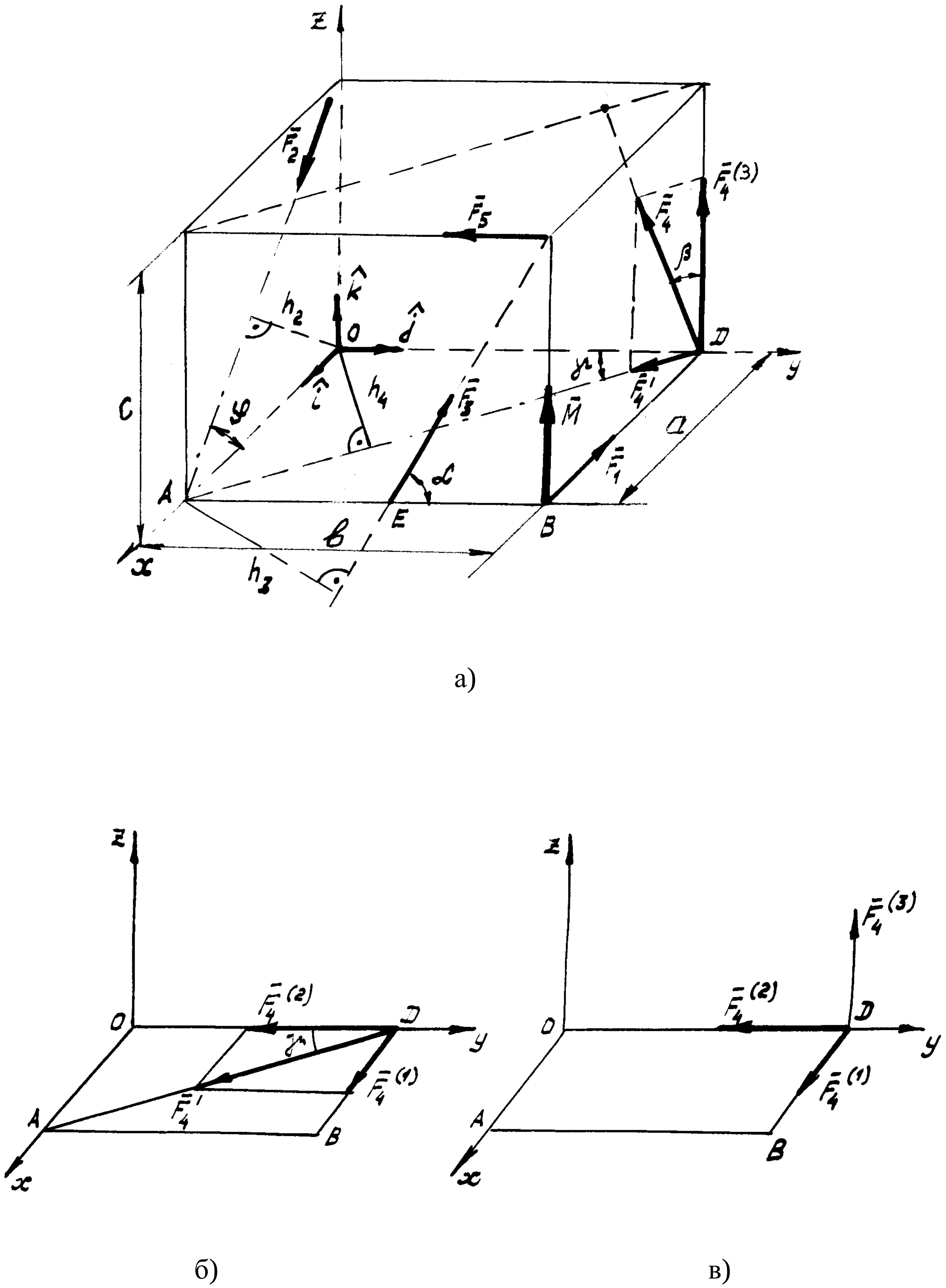


Рис. 19

$$R=\sqrt{(R_x)^2+(R_y)^2+(R_z)^2}=\sqrt{(44{,}27)^2+(-16{,}25)^2+(12{,}31)^2}=48{,}74\ \text{ Н.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{i}}\right)=\frac{R_x}{R}=\frac{44{,}27}{48{,}74}=0{,}91\ ,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{j}}\right)=\frac{R_y}{R}=\frac{-16{,}25}{48{,}74}=-0{,}33\ ,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{k}}\right)=\frac{R_z}{R}=\frac{12{,}305}{48{,}74}=0{,}25\ .$$

Проекции главного момента системы сил относительно начала координат на координатные оси равны суммам моментов всех сил относительно соответствующих координатных осей. Поэтому, будем иметь:

$$M_{ox}=M_x=\sum_{k=1}^{5}m_x(\vec{F}_k)=F_3\cdot h_3+F_4^{(3)}\cdot b+F_5\cdot c\ , \tag{4}$$

$$M_{oy}=M_y=\sum_{k=1}^{5}m_y(\vec{F}_k)=F_2\cdot h_2-F_3\cdot\sin\alpha\cdot a\ , \tag{5}$$

$$M_{oz}=M_z=\sum_{k=1}^{5}m_z(\vec{F}_k)=F_1\cdot b+F_3\cdot\cos\alpha\cdot a-F_4'\cdot h_4-F_5\cdot a+M\ , \tag{6}$$

Из рис. 19

$$h_2=a\cdot\sin\varphi=0{,}5\cdot 0{,}51=0{,}26\ \text{ м,}$$
$$h_3=AE\cdot\sin\alpha=(AB-BE)\cdot\sin\alpha=$$
$$=(a-c\cdot ctg\alpha)\cdot\sin\alpha=(0{,}5-0{,}3\cdot ctg60^0)\cdot\sin 60^0=0{,}28\ \text{ м,}$$
$$h_4=b\cdot\sin\gamma=0{,}4\cdot 0{,}78=0{,}31\ \text{ м.}$$

Подставив в (4) – (6) числовые значения всех необходимых величин, получим:

M_{ox} = 22,92 *Нм*, M_{oy} = 2,45 *Нм*, M_{oz} = 7,87 *Нм*

Модуль главного момента

$$M_o=\sqrt{(M_{ox})^2+(M_{oy})^2+(M_{oz})^2}=\sqrt{22{,}92^2+2{,}45^2+7{,}87^2}=24{,}36\ \text{ Н·м.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{M}_o,\vec{i}}\right)=\frac{M_{ox}}{M_o}=\frac{22{,}92}{24{,}36}=0{,}941,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{M}_o,\vec{j}}\right)=\frac{M_{oy}}{M_o}=\frac{2{,}45}{24{,}36}=0{,}101,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{M}_o,\vec{k}}\right)=\frac{M_{oz}}{M_o}=\frac{7{,}87}{24{,}36}=0{,}323.$$

Примечание. При вычислении моментов сил относительно координатных осей во многих случаях целесообразно разлагать силу на составляющие, параллельные осям координат, а затем применять теорему Вариньона. Проиллюстрируем этот метод на примере вычисления момента силы $\vec{F}_4$ относительно оси *Oz*. Выше показано разложение силы $\vec{F}_4$ на две составляющие $\vec{F}_4'$ и $\vec{F}_4^{(3)}$ $(\vec{F}_4=\vec{F}_4'+\vec{F}_4^{(3)})$. Далее разложим силу $\vec{F}_4'$, расположенную в координатной плоскости *Oxy* на две составляющие $\vec{F}_4^{(1)}$ и $\vec{F}_4^{(2)}$, параллельные соответственно осям *Ox* и *Oy* (рис. С-3.6б). Следовательно, $\vec{F}_4'=\vec{F}_4^{(1)}+\vec{F}_4^{(2)}$, а $\vec{F}_4'=\vec{F}_4^{(1)}+\vec{F}_4^{(2)}+\vec{F}_4^{(3)}$, то-есть сила $\vec{F}_4$ разложена на составляющие $\vec{F}_4^{(1)}$, $\vec{F}_4^{(2)}$, $\vec{F}_4^{(3)}$, параллельные осям координат (рис. 19в). Модули сил $\vec{F}_4^{(1)}$ и $\vec{F}_4^{(2)}$ легко вычисляются:

$$F_4^{(1)}=F_4'\cdot\sin g=F_4\cdot\sin b\cdot\sin g=7{,}8\ \text{Н},$$
$$F_4^{(2)}=F_4'\cdot\cos g=F_4\cdot\sin b\cdot\cos g=6{,}2\ \text{Н},$$

На основании теоремы Вариньона получим

$$M_z(\vec{F}_4)=M_z(\vec{F}_4^{(1)})+M_z(\vec{F}_4^{(2)})+M_z(\vec{F}_4^{(3)})\ ,$$
$$M_z(\vec{F}_4^{(1)})=-F_4^{(1)}\cdot AB=-3{,}12\ \text{Н·м},$$
$$M_z(\vec{F}_4^{(2)})=M_z(\vec{F}_4^{(3)})=0\ .$$

Следовательно, $M_z(\vec{F}_4)=-3{,}12$ Нм.

ЗАДАНИЕ С-4

Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Определить в зависимости от варианта задачи реакции в подпятнике или шаровом шарнире *А*, подшипнике *В*, в заделке *О*, усилия в стержнях, а также силу *Р* или натяжение нити (всего шесть неизвестных). Схемы конструкций приведены на рис.20-24, а необходимые данные - в таблице 4 (α - угол между силой P_1 и плоскостью *xy*).

Таблица 4.

№№ п/п	*a*, *m*	*b*, м	*c*, м	P_1, Н	P_2, Н	*q*, Н/м	*M*, Н·м	$a,^{o}$	$b,^{o}$	$g,^{o}$
1	0,6	1,0	0,5	50	30	20	100	60	-	-
2	0,2	1,2	0,8	40	50	10	50	30	15	-
3	0,5	1,0	1,0	60	40	15	20	45	-	-
4	0,4	1,2	0,6	20	40	-	60	30	30	45
5	0,7	1,0	-	40	30	-	45	60	30	-
6	0,9	1,3	0,8	50	-	10	40	45	30	-
7	0,2	1,0	0,6	30	50	20	100	30	30	-
8	0,8	0,6	0,4	80	40	15	80	45	30	-
9	0,5	1,0	0,6	50	40	10	30	30	15	-
10	0,6	1,1	0,5	30	60	30	80	60	30	-
11	0,4	1,0	0,6	20	50	20	100	30	15	-
12	0,8	1,2	1,0	60	80	15	40	60	45	-
13	0,5	0,8	-	50	40	-	30	-	30	-
14	0,4	1,0	-	60	-	10	50	30	45	-
15	0,6	0,9	0,2	30	10	-	60	45	60	-
16	0,2	1,0	0,4	40	14	20	70	30	15	-
17	0,6	0,8	0,5	80	-	30	40	45	30	-
18	0,5	0,8	0,6	60	15	40	100	60	30	-
19	0,3	0,6	0,5	50	60	-	60	45	30	-
20	0,4	0,5	0,6	40	30	-	50	30	30	-
21	0,5	0,8	0,4	50	100	15	50	45	15	-
22	0,4	-	1,6	40	-	-	60	30	15	-
23	0,3	0,5	1,8	-	-	20	40	45	15	-
24	0,5	0,6	0.8	50	-	-	80	30	15	-
25	0,4	0,5	2,0	60	50	-	40	45	60	15
26	0,5	0,8	1,2	50	40	20	60	60	15	-
27	0,3	0,7	1,0	80	30	30	50	45	15	-
28	0,3	0,8	1,2	30	50	10	40	30	15	-
29	0,2	0,6	1,0	50	40	15	50	45	30	-
30	0,3	0,6	1,0	40	50	20	30	60	15	-

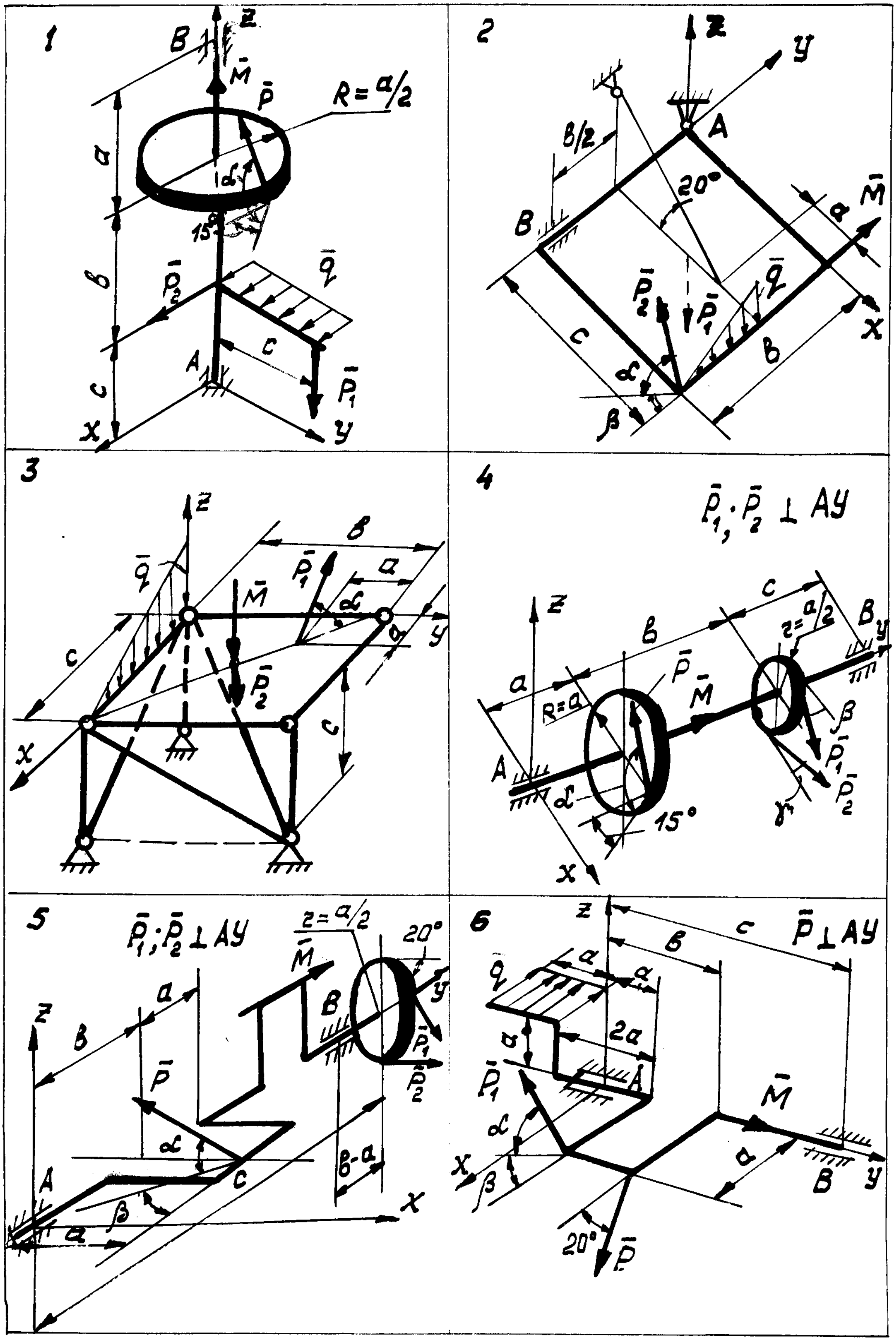


Рис. 20

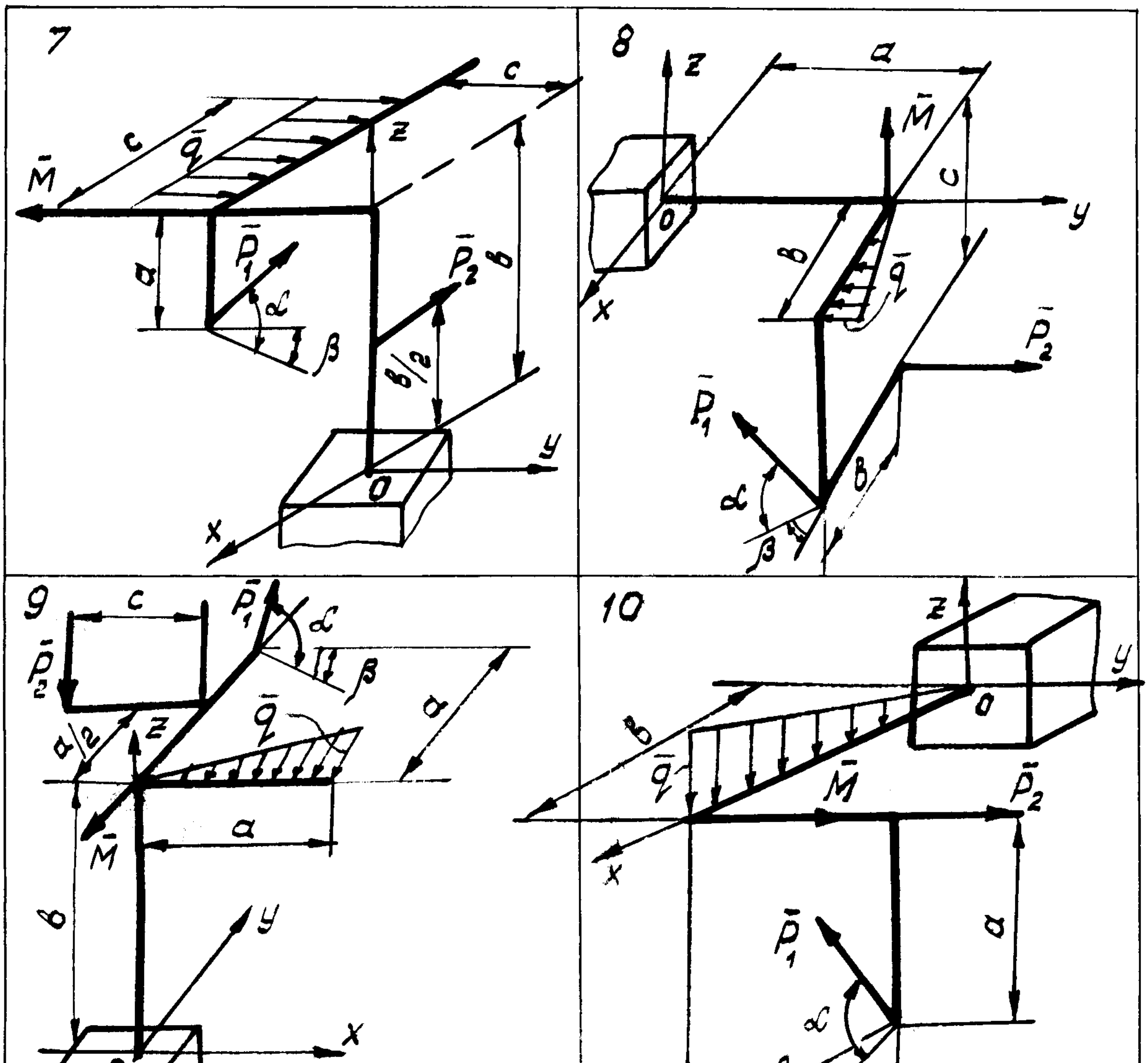


Рис. 21

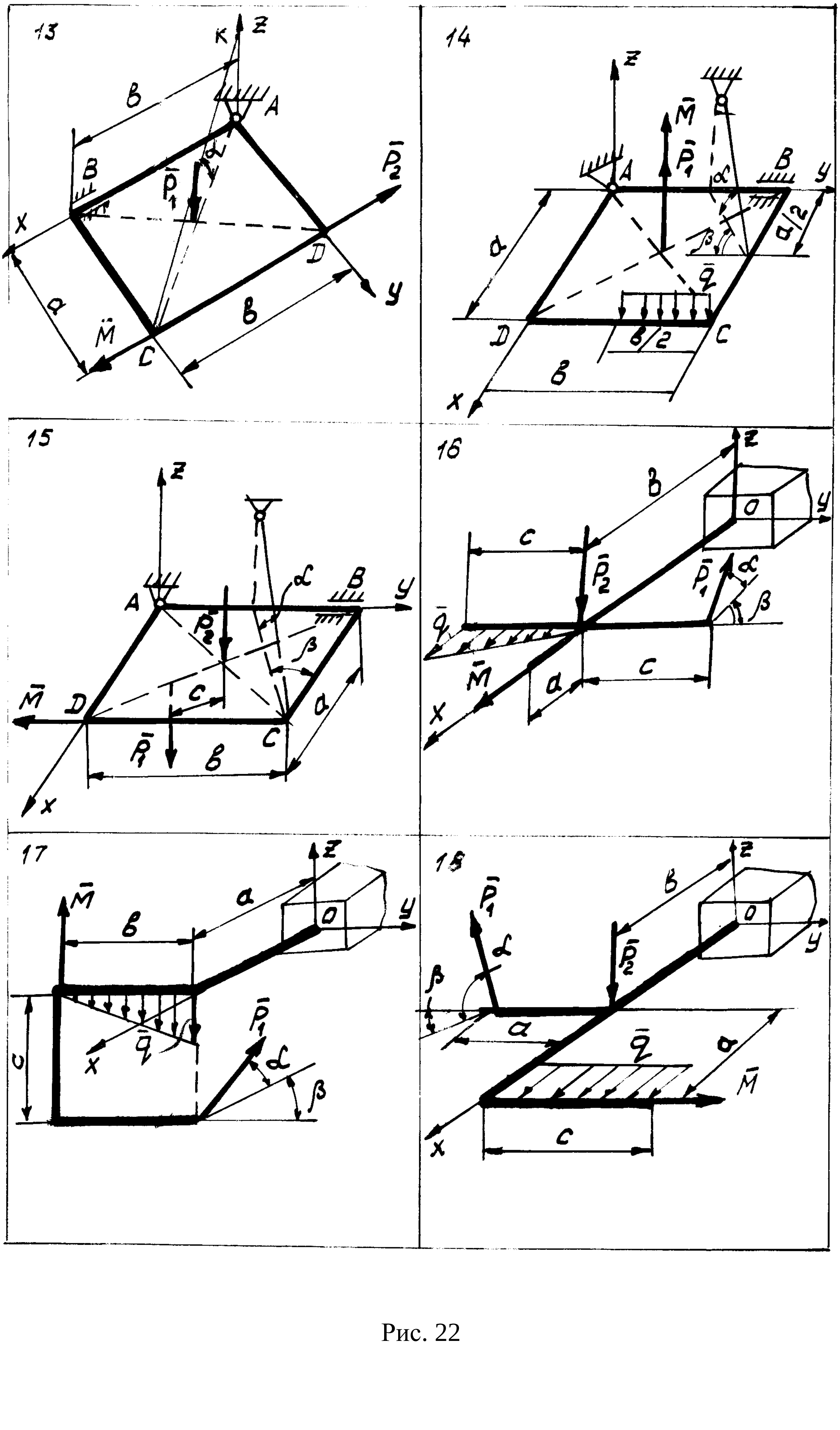


Рис. 22

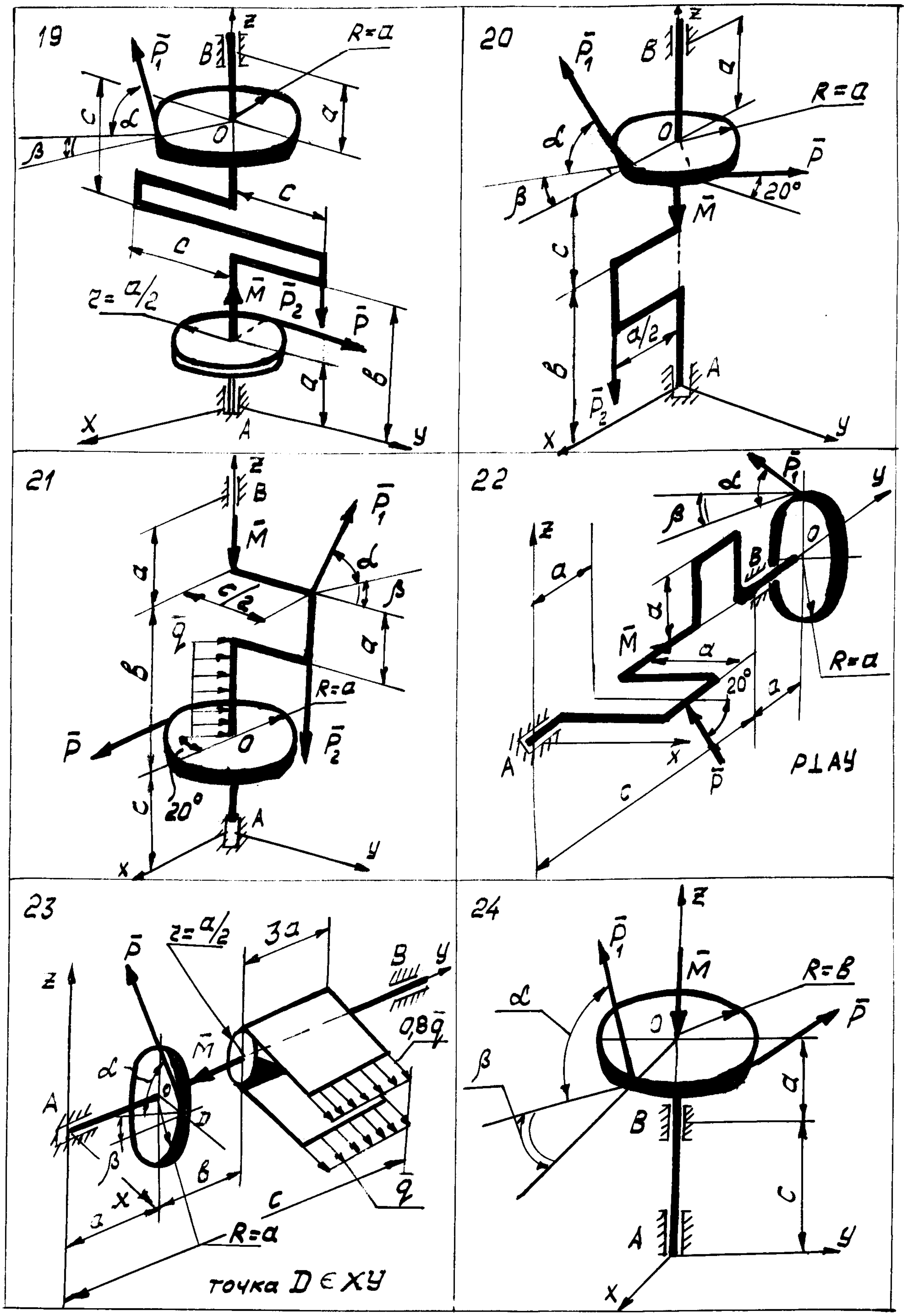

19
R=a
r=a/2
20
R=a
20°
a/2
21
R=a
20°
c/2
22
R=a
20°
P⊥AY
23
r=a/2
3a
0,8q
R=a
точка D ∈ XY
24
R=b

Рис. 23

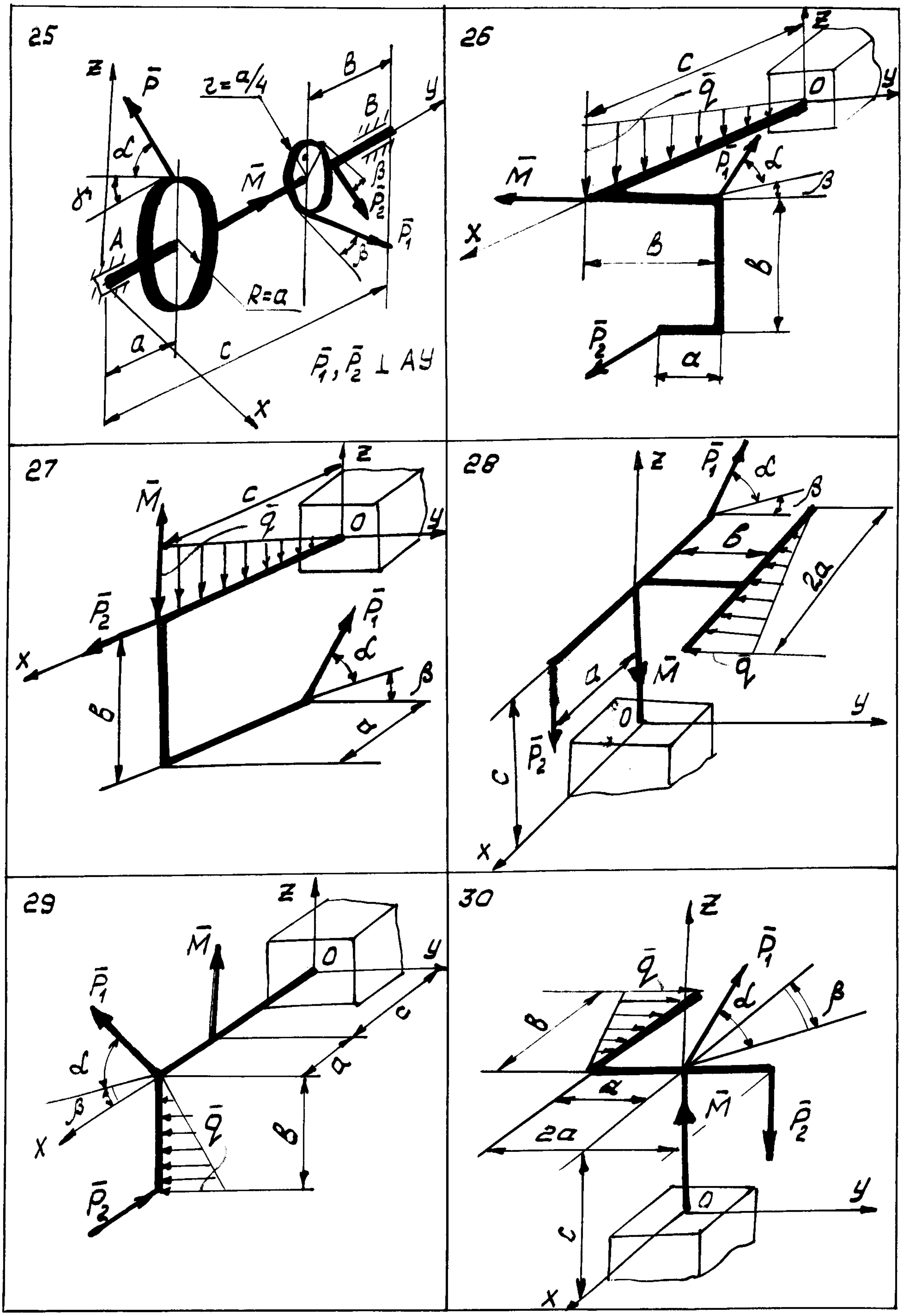


Рис. 24

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: пластинка *ABCD*, P_1=10 *Н*, P_2=20 *Н*, *M*=50 *Нм*, $\alpha=60^0$, $\beta=30^0$, $\gamma=45^0$, *a*=1 *м*, *b*=0,8 *м*. Сила P_1 лежит в плоскости *xBz*. Нить прикреплена в точке *D* пластинки и точке *E*, лежащей в плоскости *ZBY* (рис.25.а).

Определить реакции в шаровом шарнире *A*, подшипнике *B* и натяжение нити в точке *D*.

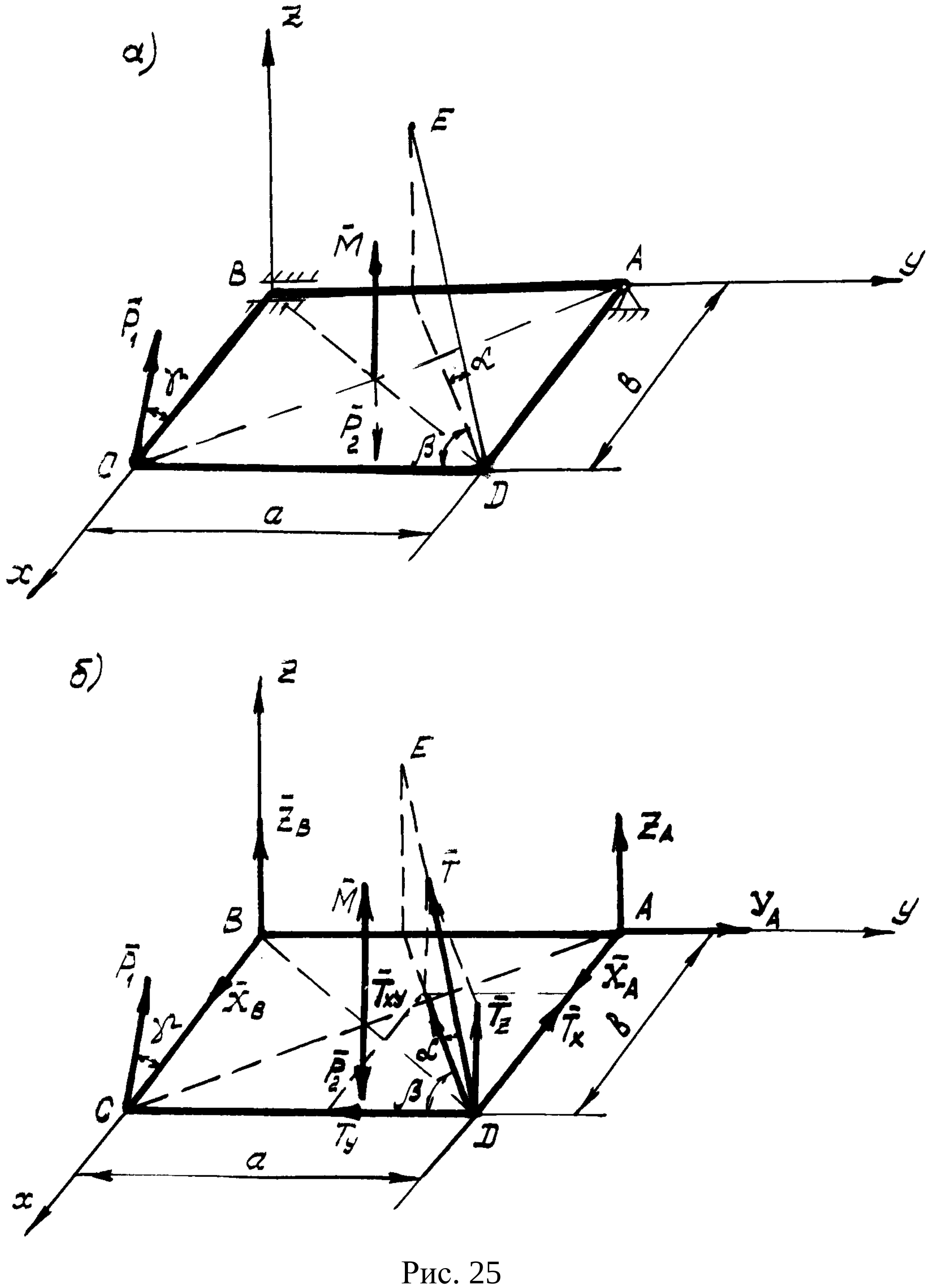


Рис. 25

РЕШЕНИЕ

Выбираем правую систему координат с началом в точке *B*. Освобождаемся от связей и заменяем их действие реакциями. В точке *A* реакции шарового шарнира раскладываем на три составляющих $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$. В точке *B* реакцию цилиндрического шарнира раскладываем на две составляющие в плоскости *xBz* ($\vec{X}_B, \vec{Z}_B$). В точке *D* нити *T* направлена вдоль *ED* к точке крепления. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к пластинке. Система сил, приложенная к пластинке, произвольная. Среди них имеется шесть неизвестных (X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B и *T*). Для определения неизвестных составим шесть уравнений равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \qquad \sum_k m_x\left(\vec{F}_x\right) = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \qquad \sum_k m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0,$$

$$\sum_k F_{kz} = 0, \qquad \sum_k m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

При решении задач воспользуемся двойным проектированием силы $\vec{T}$. Сначала найдем модуль проекции этой силы на плоскость *xBy* и модуль проекции на ось *z*.

$$\left|\vec{T}_{xy}\right| = T_{xy} = T \cdot \cos a, \qquad \left|\vec{T}_z\right| = T_z = T \cdot \sin a.$$

Так как проекция силы на плоскость есть величина векторная, то можно найти модули ее проекций на оси координат *x* и *y*

$$\left|\vec{T}_x\right| = T_x = T_{xy} \cdot \sin b = T \cdot \cos a \cdot \sin b,$$

$$\left|\vec{T}_y\right| = T_y = T_{xy} \cdot \cos b = T \cdot \cos a \cdot \cos b.$$

Таким образом момент силы *T* относительно всех осей *Bx*, *By*, *Bz* имеют вид:

$$m_x\left(\vec{T}\right) = T_z \cdot a = T \cdot \sin a \cdot a,$$

$$m_y\left(\vec{T}\right) = -T_y \cdot b = -T \cdot \sin a \cdot b,$$

$$m_z\left(\vec{T}\right) = T_x \cdot a - T_y \cdot b = T \cdot \cos a \cdot \sin b \cdot a - T \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot b.$$

Составим уравнение равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \qquad X_B + X_A - P_1 \cdot \cos g - T \cdot \cos a \cdot \sin b = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \qquad Y_A - T \cdot \cos a \cdot \cos b = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_k F_{kz} = 0; \qquad Z_A + Z_B + P_1 \cdot \sin g - P_2 + T \cdot \sin a = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_k m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0; \qquad -P_2 \cdot \frac{a}{2} + Z_A \cdot a + T \cdot \sin a \cdot a = 0, \qquad (4)$$

$$\sum_k m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0; \qquad -P_1 \cdot \sin g \cdot b + P_2 \cdot \frac{b}{2} - T \cdot \sin a \cdot b = 0, \qquad (5)$$

$$\sum_k m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0; \qquad M - X_A \cdot a - T \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot b + T \cdot \cos a \cdot \sin b \cdot a = 0. \qquad (6)$$

Решая систему уравнений $(1)-(6)$, определим:

из (5) $\qquad T = \dfrac{1}{\sin a} \cdot \left[\dfrac{P_2}{2} - P_1 \cdot \sin g\right] = 35(H),$

из (6) $\qquad X_A = \dfrac{M}{a} - \dfrac{b}{a} \cdot T \cdot \cos a \cdot \cos b + T \cdot \cos a \cdot \sin b = 46{,}7(H),$

из (4) $\qquad Z_A = \dfrac{P_2}{2} - T \cdot \sin a = -20{,}1(H),$

из (2) $\qquad Y_A = T \cdot \cos a \cdot \cos b = 15{,}0(H),$

из (3) $\qquad Z_B = P_2 - P_1 \cdot \sin g - Z_A - T \cdot \sin a = 3(H),$

из (1) $\qquad X_B = P_1 \cdot \cos g + T \cdot \cos a \cdot \sin b - X_A = -48{,}45(H),$

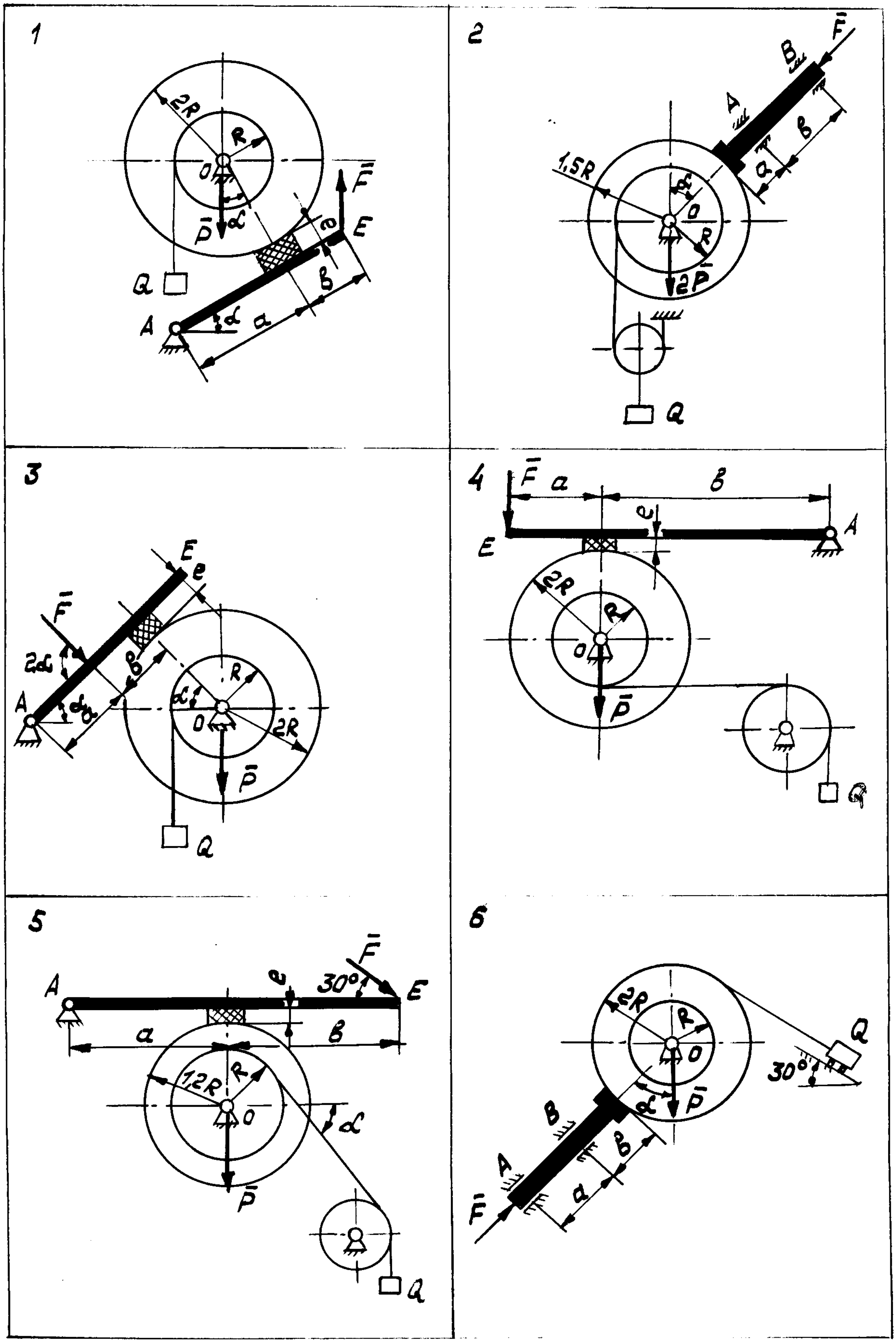
ЗАДАНИЕ С-5

Равновесие тел с учетом сил трения

Определить, при каких значениях силы $\vec{F}$ возможно равновесие конструкции, если коэффициент трения скольжения между тормозной колодкой и касающимся с ней телом равен *f*. Шириной колодки пренебречь, считая контакт точечным. Определить также реакции опор O, A, B, C, D, соответствующие предельному состоянию равновесия конструкции. Трением в шарнирах и опорах пренебречь. Схемы вариантов приведены на рис.26-30, а необходимые данные - в таблице 5.

Таблица 5

№№ п/п	*P*, кН	*Q*, кН	*a*, м	*b*, м	*l*, м	α, ^{0}	*f*
1	0,1	0,4	0,5	0,7	0,03	45	0,10
2	0,2	0,6	0,6	0,4	–	30	0,20
3	0,3	0,8	0,8	0,2	0,06	60	0,25
4	0,4	0,5	0,4	0,5	0,08	30	0,15
5	0,5	0,9	0,3	0,7	0,04	60	0,10
6	0,6	1,0	0,2	0,6	–	45	0,25
7	0,4	1,2	0,7	0,2	0,06	30	0,20
8	0,3	1,4	0,8	0,4	–	60	0,15
9	0,5	1,6	0,5	0,3	–	45	0,20
10	0,3	1,2	0,6	0,3	0,08	30	0,25
11	0,1	0,4	0,5	0,7	0,03	45	0,10
12	0,2	0,6	0,6	0,4	–	30	0,20
13	0,3	0,8	0,8	0,2	–	60	0,25
14	0,4	0,5	0,4	0,5	0,08	30	0,15
15	0,5	0,9	0,3	0,7	–	60	0,10
16	0,6	1,0	0,2	0,6	0,05	45	0,25
17	0,4	1,2	0,7	0,2	0,9	30	0,20
18	0,3	1,4	0,8	0,4	0,02	60	0,15
19	0,5	1,6	0,5	0,3	0,08	45	0,20
20	0,3	1,2	0,6	0,3	–	30	0,25
21	0,1	0,4	0,5	0,7	0,03	–	0,10
22	0,2	0,6	0,6	0,4	0,04	–	0,20
23	0,3	0,8	0,8	0,2	0,06	45	0,25
24	0,4	0,5	0,4	0,5	0,08	30	0,15
25	0,5	0,9	0,3	0,7	0,04	30	0,10
26	0,6	1,0	0,2	0,6	0,05	60	0,25
27	0,4	1,2	0,7	0,2	0,06	45	0,20
28	0,3	1,4	0,8	0,4	0,02	30	0,15
29	0,5	1,6	0,5	0,3	0,08	60	0,20
30	0,3	1,2	0,6	0,3	0,08	45	0,25



1
2R
R
O
$\bar{F}$
$\bar{P}$
α
e
E
Q
A
a
в
2
$\bar{F}$
B
A
в
a
1,5R
α
O
R
$2\bar{P}$
Q
3
E
e
$\bar{F}$
2α
в
A
α
R
O
2R
$\bar{P}$
Q
4
$\bar{F}$
a
в
e
A
E
2R
R
O
$\bar{P}$
Q
5
A
e
$\bar{F}$
30°
E
a
в
1,2R
R
O
α
$\bar{P}$
Q
6
2R
R
O
Q
30°
α
$\bar{P}$
B
в
A
a
F

Рис. 26

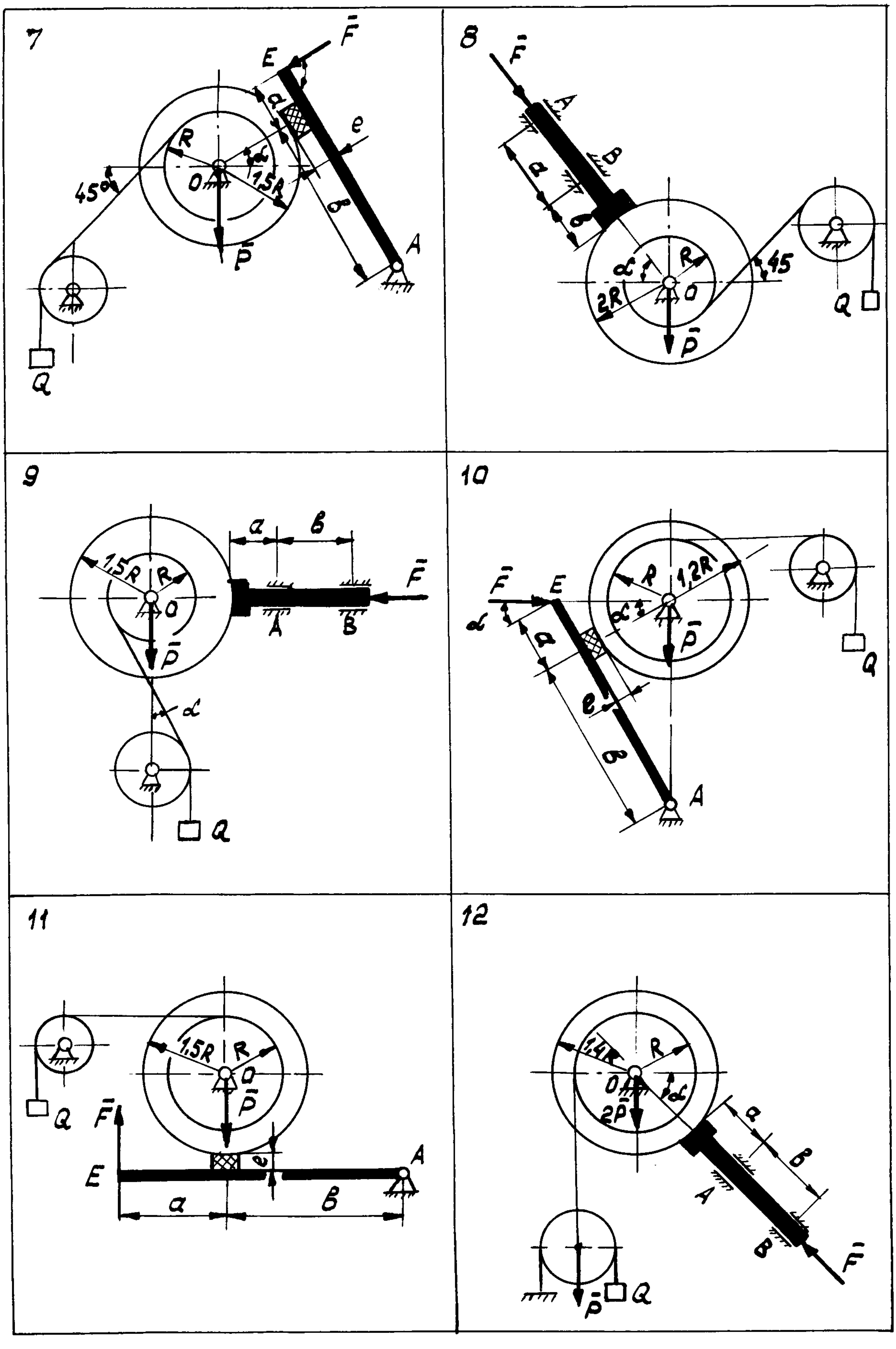


Рис. 27

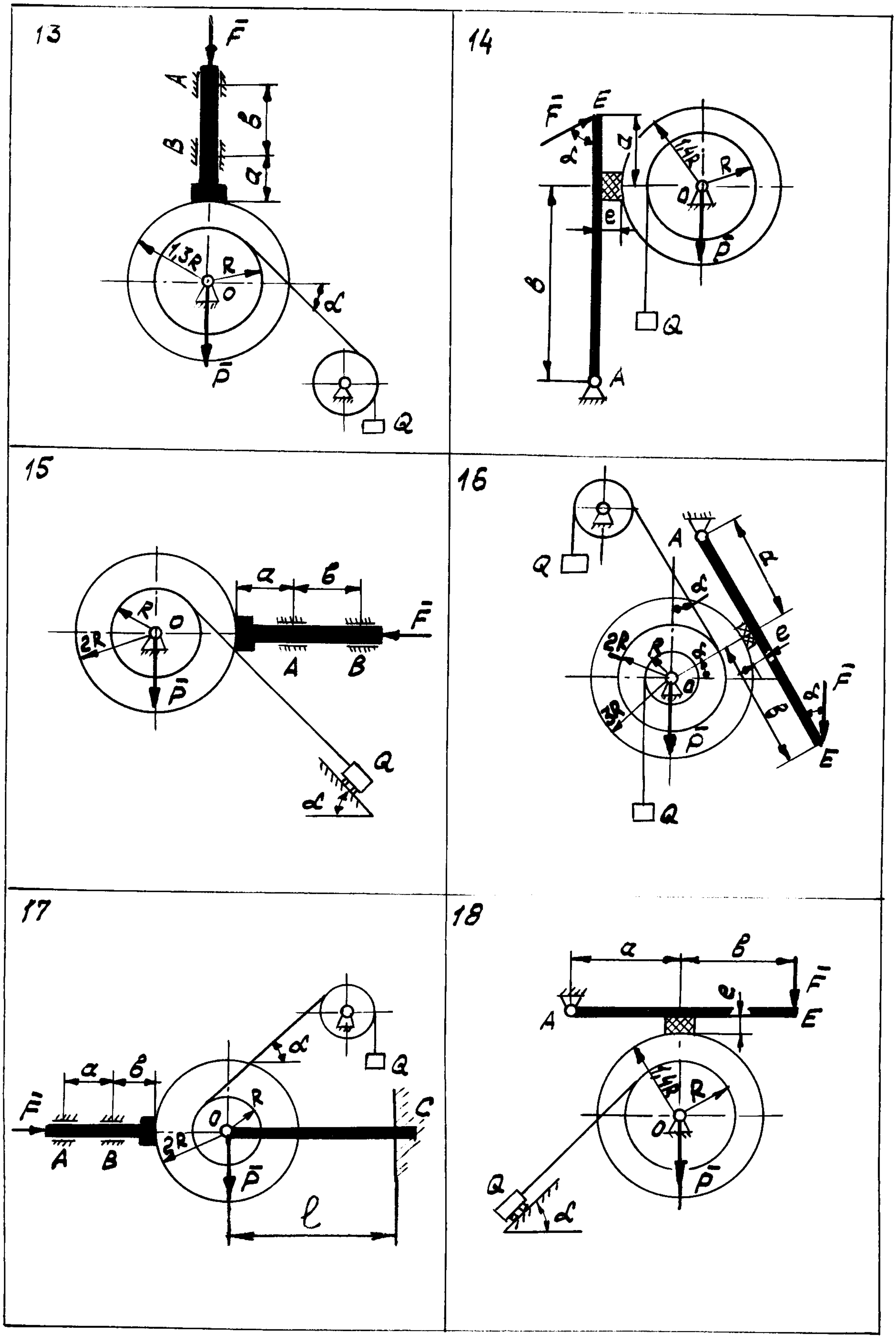


Рис. 28

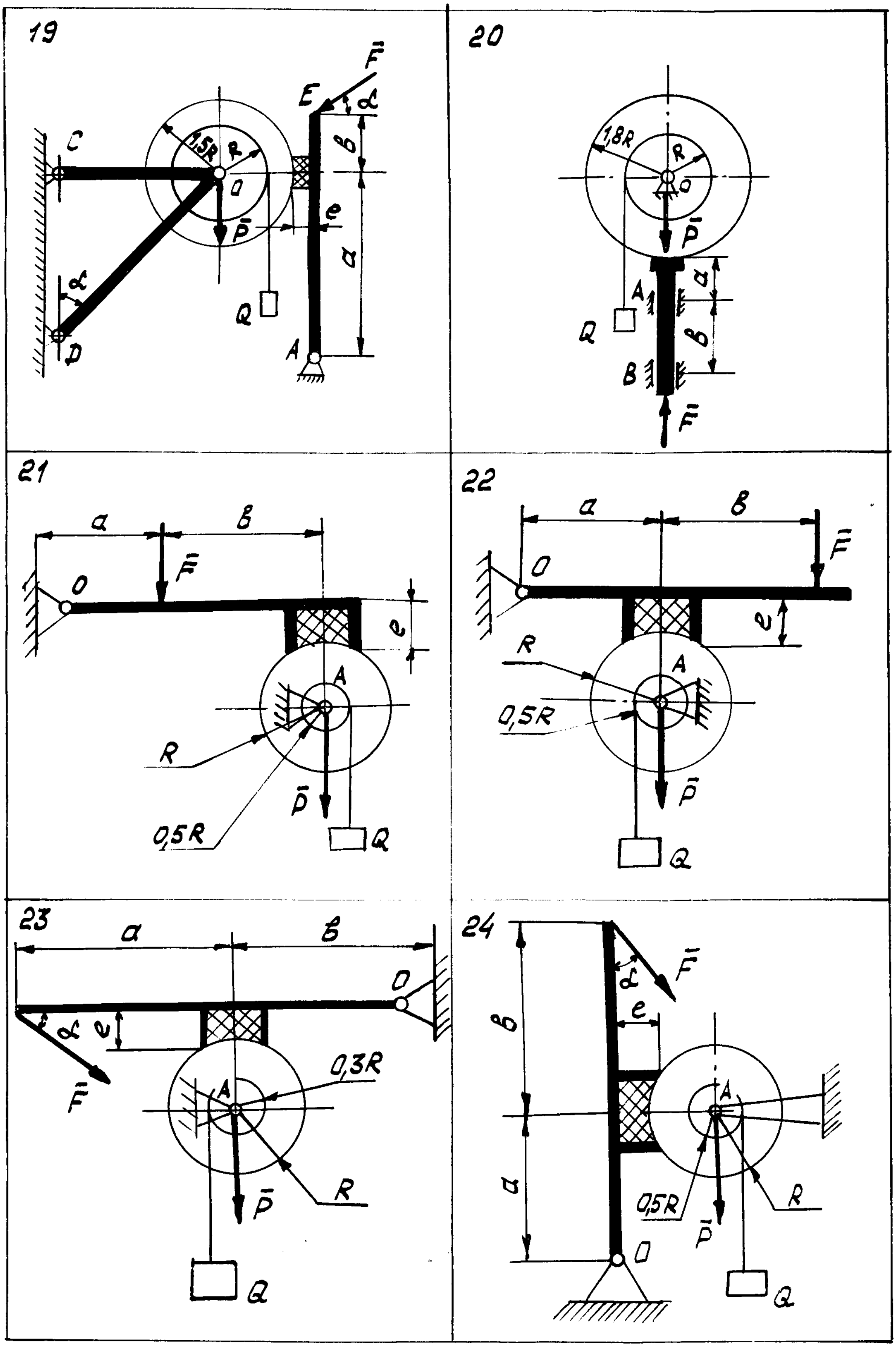

19
C
1,5R
R
O
E
F
α
b
e
P
a
Q
D
A
20
1,8R
R
O
P
A
a
Q
b
B
F
21
a
b
O
F
e
A
R
P
0,5R
Q
22
a
b
O
F
e
R
A
0,5R
P
Q
23
a
b
O
α
e
F
0,3R
A
P
R
Q
24
b
α
F
e
A
a
0,5R
P
R
O
Q

Рис. 29

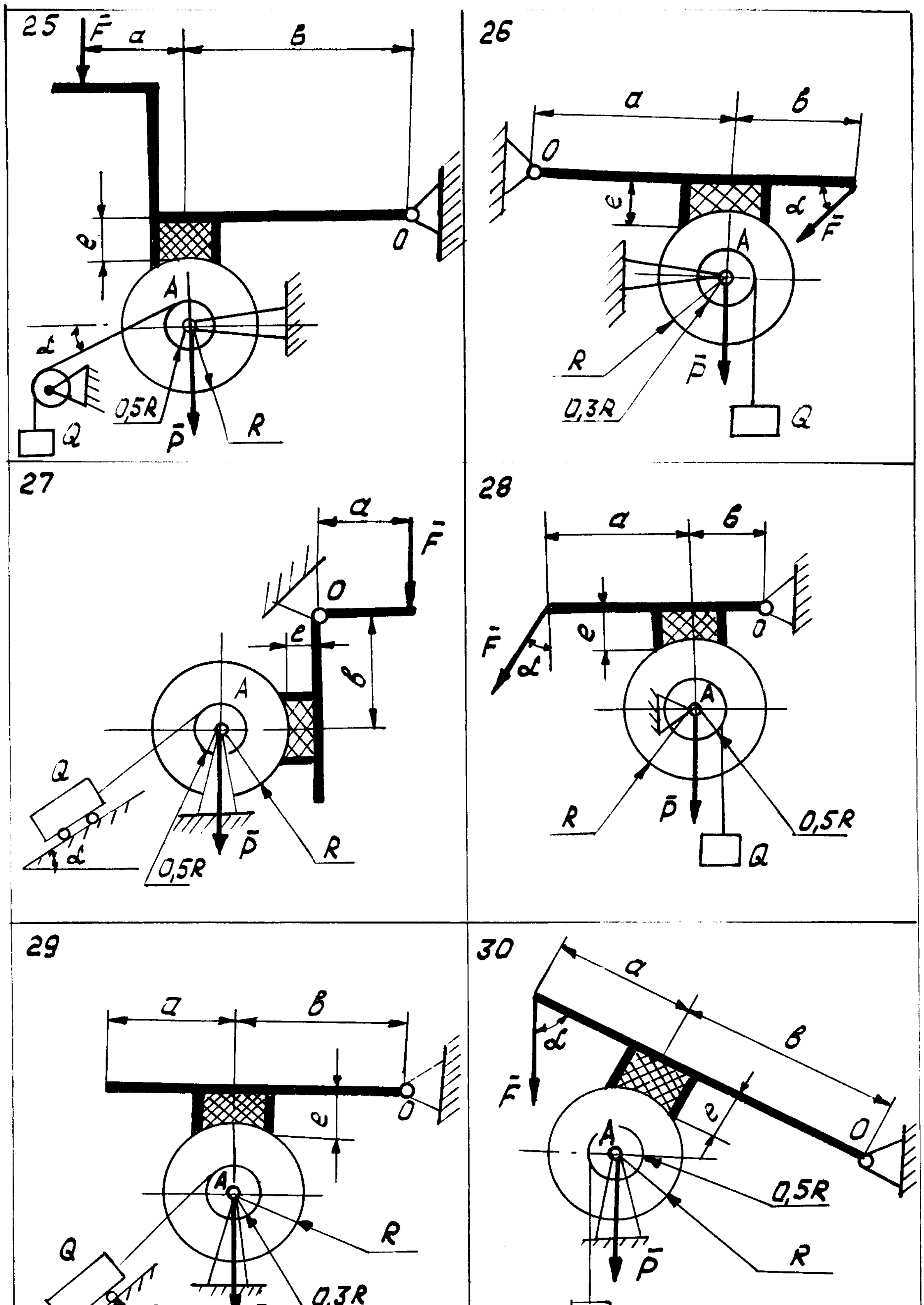

25
F
a
в
e
O
A
α
0,5R
P
R
Q
26
a
в
O
e
α
F
A
R
P
0,3R
Q
27
a
F
O
e
в
A
Q
α
0,5R
P
R
28
a
в
e
O
F
α
A
R
P
0,5R
Q
29
a
в
e
O
A
Q
α
R
0,3R
P
30
a
в
α
F
e
O
A
0,5R
P
R
Q

Рис. 30

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис.31а); P = 0,3 кН, Q = 1,2 кН, a = 0,5 м, b = 0,2 м, l = 0,04 м, α= 60^0, β = 45^0, f = 0,25.

Определить, при каких значениях силы $\bar{F}$ возможно равновесие конструкции. Определить также реакции опор O и A, соответствующие предельному состоянию равновесия.

РЕШЕНИЕ

Рассматриваемая конструкция состоит из трех тел: тележки, барабана и стержня АЕ с тормозной колодкой.

Рассмотрим равновесие, предполагая, что оно имеет место, для каждого из тел в отдельности.

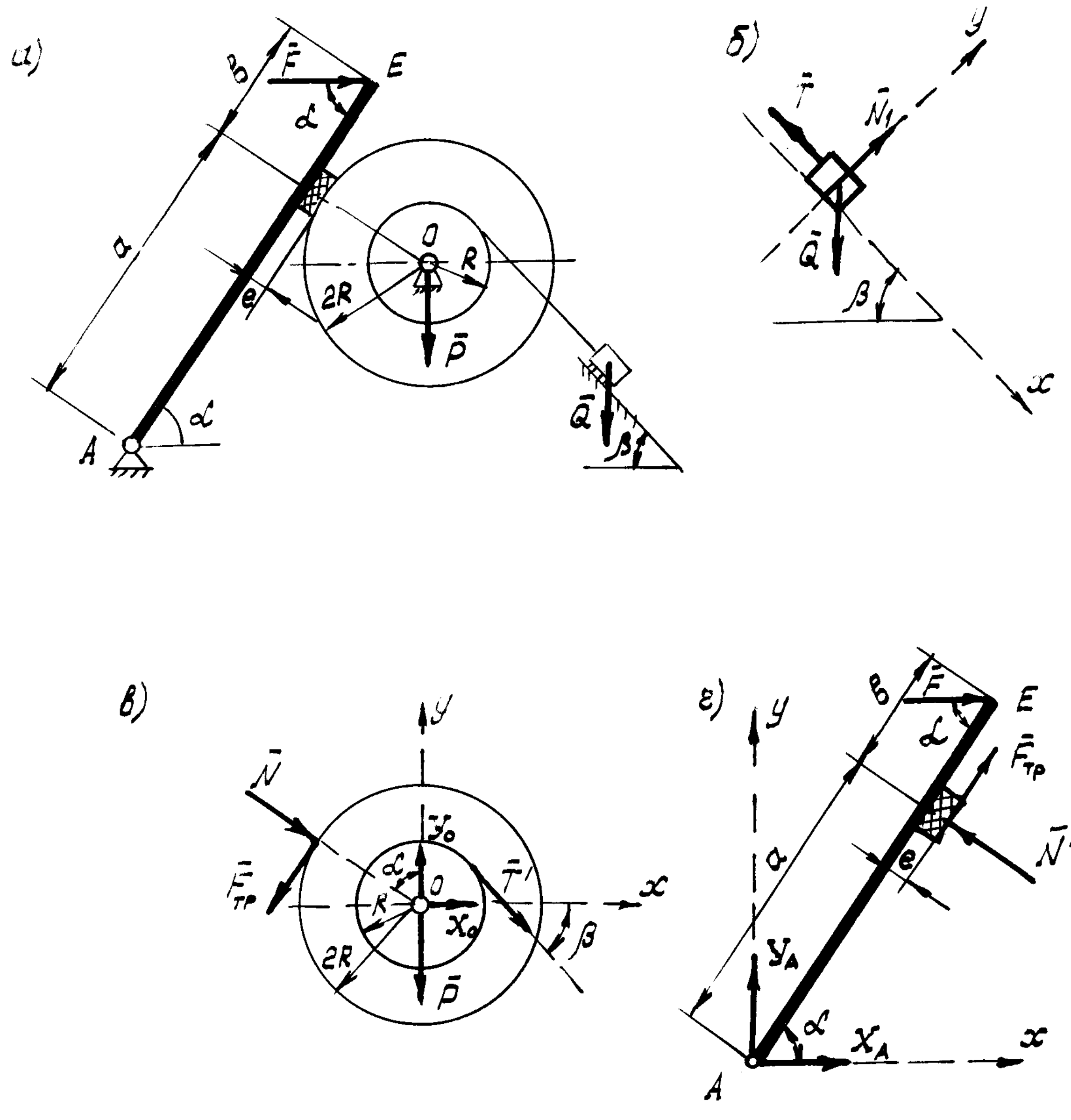


Рис. 31

Сначала запишем уравнения равновесия тележки. На тележку действуют: сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}$ и нормальная реакция наклонной плоскости $\vec{N}_1$ (рис.31б). Выбрав координатные оси, как показано на рисунке 31б, запишем следующие уравнения равновесия указанной системы сил:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Q \cdot \sin b - T = 0. & (1) \\ N_1 - Q \cdot \cos b = 0. & (2) \end{cases}$$

Далее запишем уравнения равновесия барабана (рис.31в). На барабан действуют: сила тяжести $\vec{P}$, реакция нити $\vec{T}'$, реакция шарнирно-неподвижной опоры O, представленная двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_o$, $\vec{Y}_o$, давление $\vec{N}$ тормозной колодки и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Учитывая, что величины сил $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ равны (T = T'), уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на барабан представим в виде:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & T \cdot \cos b + N \cdot \sin a - F_{тр} \cdot \cos a + X_o = 0, & (3) \\ \sum_i F_y = 0, & Y_o - P - T \cdot \sin b - F_{тр} \cdot \sin a - N \cdot \cos a = 0, & (4) \\ \sum_i m_o(\vec{F}_i) = 0, & F_{тр} \cdot 2 \cdot R - T \cdot R = 0. & (5) \end{cases}$$

Затем рассмотрим равновесие стержня АЕ с тормозной колодкой (рис.31г). На стержень АЕ с тормозной колодкой действует следующая плоская произвольная система сил: сила $\vec{F}$, нормальная реакция $\vec{N}'$ барабана, сила трения $\vec{F}'_{тр}$ и реакция шарнирно-неподвижной опоры А, представляемая составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$. Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия величины сил $\vec{N}$ и $\vec{N}'$, а также $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$ равны

$$N = N', \qquad F_{тр} = F'_{тр}. \qquad (6)$$

Уравнения равновесия указанной системы сил с учетом соотношений (6) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & X_A + F - N \cdot \sin a + F_{тр} \cdot \cos a = 0, & (7) \\ \sum_i F_{iy} = 0, & Y_A + N \cdot \cos a + F_{тр} \cdot \sin a = 0, & (8) \\ \sum_i m_o(\vec{F}_i) = 0, & N \cdot a + F_{тр} \cdot l - F \cdot (a+b) \cdot \sin a = 0. & (9) \end{cases}$$

И, наконец, запишем условия равновесия конструкции при наличии трения:

$$F_{тр} \le f \cdot N \tag{10}$$

Система полученных линейных алгебраических уравнений (1) – (5), (7) – (9) с учетом неравенства (10) позволяет полностью решить поставленную задачу.

Прежде всего необходимо найти, при каких значениях силы F конструкция будет находиться в равновесии (то есть будет удовлетворяться неравенство (10)). С этой целью найдем на основании уравнений (1), (5) и (9) величины сил $F_{тр}$ и N, входящих в неравенство (10):

$$F_{тр} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b, \tag{11}$$

$$N = \frac{1}{a} \cdot \left[F \cdot (a+b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \tag{12}$$

В результате подстановки (11) и (12) в (10) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \le \frac{f}{a} \cdot \left[F \cdot (a+b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \tag{13}$$

На основании (13) можно найти значения величины силы F, при которых рассматриваемая конструкция будет находиться в состоянии равновесия:

$$F \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot \sin b \cdot (a + f \cdot l)}{f \cdot (a+b) \cdot \sin a} \tag{14}$$

При заданных параметрах, входящих в правую часть (14), значения величины силы F, при которых конструкция будет находиться в равновесии, определится неравенством:

$$F \ge 1{,}43 кН \tag{15}$$

В случае предельного состояния равновесия конструкции сила F будет иметь минимальное значение

$$F_{\min} = 1{,}43 кН. \tag{16}$$

Учитывая (16) и данные задачи, на основании (1), (3), (4), (7), (8), (11) и (12) найдем реакции неподвижных опор O и A в случае предельного состояния равновесия конструкции:

X_o = -1,86 *кН*, Y_o = 2,12 *кН*, X_A = -0,17 *кН*, Y_A = -1,22 *кН*.

Следует заметить, что уравнение равновесия (2) оказалось не востребованным так как по условию задачи не требовалось определить нормальную реакцию N наклонной плоскости.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на листах писчей или чертежной бумаги формата А4 (210×297 мм). Текст и рисунки наносятся только на одну сторону листа. Выполнение рисунков «от руки» не допускается.

2. Первая страница представляет собой титульный лист, образец которого приведен ниже.

3. На второй странице записывается условие задания, вычерчивается заданная схема и выписываются из таблицы все данные (для соответствующего варианта).

4. Решение задачи начинается с третьей страницы, на которой вычерчивается расчетная схема механизма. Схема выполняется аккуратно, четко и в таком масштабе, который позволит ясно изобразить все необходимые размеры, векторы сил, моментов и т. д..

Образец титульного листа

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

Кафедра «Теоретическая механика»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ______
Вариант № _____

Студент ___________________

Группа ____________________

Преподаватель ______________

МОСКВА 2004

Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицына Г.И., Петров В.К., Томило Э.А., Зубков А.И.
Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря Валентина Степановича
Расчетно-графические работы по статике.
Методические указания по курсу «Теоретическая механика» для студентов всех специальностей.

Подписано в печать Заказ Тираж экз.
Усл. п. л. Уч.-изд. л.
Бумага типографская Формат 60×90/16

МГТУ «МАМИ», 105839, Москва, Б. Семеновская, 38.